

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

52e jaargang
1976/1977
no 6
februari

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.
De contributie bedraagt *f* 35,— per verenigingsjaar; studentleden *f* 21,—; contributie zonder Euclides *f* 15,—.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij B. Zwaneveld, Haringvlietstraat 9II, Amsterdam, tel. 020-738912. Zij dienen met de machine geschreven te zijn.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-13367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan W. Kleijne, De Kluut 10, Heerenveen, tel. 05130-24782.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Dennenlaan 17, Dorst (N.B.)

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 30,50. Een kollectief abonnement (6 exx. of meer) is per abonnement *f* 17,50. Niet-leden kunnen zich abonneren bij: Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 58, Groningen. Tel. 050-162189. Giro: 1308949.
Abonnees worden dringend verzocht te wachten met betalen tot hen een acceptgirokaart wordt toegezonden.
Abonnementen kunnen bij elk nummer ingaan, maar gelden zonder nadere opgave altijd voor de gehele lopende jaargang.
Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.

Losse nummers *f* 5,50 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:

Intermedia bv, Postbus 58, Groningen, tel. 050-162222.

Tarieven: 1/1 pag. *f* 275,—, 1/2 pag. *f* 150,— en 1/4 pag. *f* 85,—.

Examen middelbaar algemeen voortgezet onderwijs in 1976 MAVO 3

Dinsdag 11 mei, 930 – 11.30 uur

Wiskunde I

Lees dit eerst:

a. Dit gedeelte van het examen bestaat uit vijfentwintig vierkeuzevragen. Bij elke vraag staan vier antwoorden vermeld, voorafgegaan door de letters A, B, C en D; precies één van deze antwoorden is het goede antwoord. Controleer vóór het einde van dit examen of alle vragen zijn beantwoord; voor een niet-ingevuld antwoord wordt geen enkel punt toegekend.

b. Bij berekeningen mag, indien een benadering vereist is, gebruik worden gemaakt van een rekenliniaal of van tabellen van wortels en goniometrische verhoudingen.

c. Vragen over puntverzamelingen hebben, tenzij uit het gegeven anders blijkt, betrekking op het platte vlak.
Coördinaten hebben betrekking op een rechthoekig assenstelsel.
Cursief gedrukte kleine letters stellen elementen van de verzameling $\mathbb{R}$ van de reële getallen voor, tenzij uit het gegeven anders blijkt.
Evenzo wordt, tenzij uit het gegeven anders blijkt, met het geordende paar (x, y) bedoeld: $x \in \mathbb{R}$ en $y \in \mathbb{R}$, m.a.w. $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
Als bij een functie $x \rightarrow f(x)$ geen domein is aangegeven, wordt als domein de verzameling van alle reële getallen bedoeld waarvoor $f(x)$ betekenis heeft.

1. $x+1$ is een factor van
   A x^2+x+2
   B x^2+x-2
   C x^2-x+2
   D x^2-x-2

2. Gegeven is een functie f gedefinieerd door $f(x) = 2x-p$.
   Als $f(-3) = 0$ dan geldt voor p
   A $p = -6$
   B $p = -3$
   C $p = 3$
   D $p = 6$

3. De oplossingsverzameling van $x-2 < x-3$ is
A ϕ
B $\{x \mid x < 0\}$
C $\{x \mid x > 0\}$
D $\mathbb{R}$

4. Van een gelijkbenige, rechthoekige driehoek is de lengte van de schuine zijde 8.
De oppervlakte van deze driehoek is gelijk aan
A $8\sqrt{2}$
B 16
C $16\sqrt{2}$
D 32

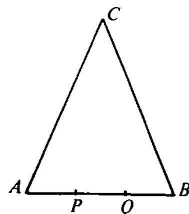
5. Bij spiegeling in de lijn $x = 0$ wordt elk punt (a, b) afgebeeld op
A (a, b)
B $(a, -b)$
C $(-a, b)$
D $(-a, -b)$

6. Van de rij waarnemingsgetallen 8, 9, 5, 3, p, 10, 5, 4 is de mediaan 6.
Voor p geldt
A $p = 5$
B $p = 6$
C $p = 7$
D $p = 9$

7. De top van de grafiek van $x \rightarrow -x^2+2x+1$ is het punt
A $(-1, -2)$
B $(-1, 2)$
C $(1, -2)$
D $(1, 2)$

8. $\{(x, y) \mid y = -x^2+7\} \cap \{(x, y) \mid y = 3\} =$
A ϕ
B $\{(2, 3)\}$
C $\{(-2, 3)\}$
D $\{(2, 3), (-2, 3)\}$

9. Van $\triangle ABC$ is gegeven $AC = BC$.
P en Q zijn punten op lijnstuk AB zo dat $AP = PQ = QB$.
(1) $\triangle APC$ en $\triangle PQC$ hebben gelijke omtrekken.
(2) $\triangle APC$ en $\triangle PQC$ hebben gelijke oppervlakten.
A (1) en (2) zijn beide waar
B (1) is waar, (2) is niet waar
C (1) is niet waar, (2) is waar
D (1) en (2) zijn beide niet waar



10. Als $-1 \in \{x | -a+x = -2\}$ dan geldt voor a

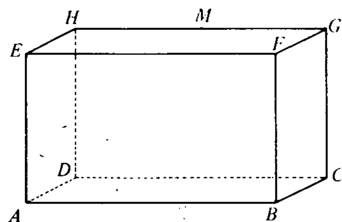
A $a = -3$
B $a = -1$
C $a = 1$
D $a = 3$

11. Gegeven zijn de punten $A(4, 3)$, $B(3, 4)$ en $C(1, 1)$.
Voor de grootte α van hoek BAC geldt

A $\alpha \leqq 70°$
B $70° < \alpha \leqq 75°$
C $75° < \alpha \leqq 80°$
D $80° < \alpha$

12. Van balk $ABCD.EFGH$ is $AB = 10$, $AE = 3$ en $AD = 4$.
M is het midden van ribbe GH.
Voor de grootte α van hoek AMB geldt

A $60° \leqq \alpha < 70°$
B $70° \leqq \alpha < 80°$
C $80° \leqq \alpha < 90°$
D $90° \leqq \alpha < 100°$

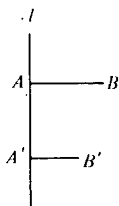


13. Gegeven zijn de functies $f : x \to 0$,
$g : x \to 1$ en
$h : x \to x$.

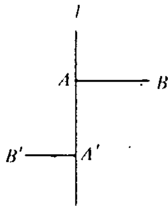
Er geldt

A $f \cap g = \phi \wedge f \cap h = \phi$
B $f \cap g = \phi \wedge f \cap h \neq \phi$
C $f \cap g \neq \phi \wedge f \cap h = \phi$
D $f \cap g \neq \phi \wedge f \cap h \neq \phi$

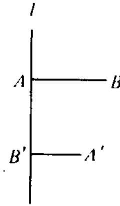
14.



Figuur 1



Figuur 2

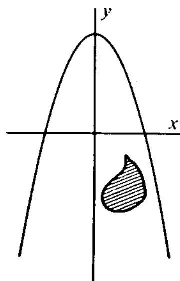


Figuur 3

In elk van bovenstaande figuren is lijnstuk $A'B'$ het beeld van lijnstuk AB bij een vermenigvuldiging waarbij $A \to A'$ en $B \to B'$.
Het aantal figuren waarin het centrum van vermenigvuldiging op lijn l ligt, bedraagt

A 0
B 1
C 2
D 3

15. In nevenstaand assenstelsel is de grafiek getekend van $y = -x^2+4$.
Voor de coördinaten x en y van elk punt van het gearceerde vlakdeel geldt
A $y > -x^2+4 \wedge x > 0$
B $y > -x^2+4 \wedge x < 0$
C $y < -x^2+4 \wedge x > 0$
D $y < -x^2+4 \wedge x < 0$



16. Van een tweedegraadsfunctie f is $f(3)$ de maximale waarde.
Het volledig origineel van 0 van deze functie kan zijn
A $\{3, 6\}$
B $\{3, 9\}$
C $\{-3, 6\}$
D $\{-3, 9\}$

17. Gegeven een kubus met een ribbe a en een balk met lengte a, breedte a en hoogte $3a$.
De inhouden van deze kubus en deze balk verhouden zich als de getallen
A 1 en 3
B 1 en 6
C 1 en 9
D 1 en 27

18. De oppervlakten van twee gelijkzijdige driehoeken verhouden zich als de getallen 1 en 4.
De omtrekken van deze driehoeken verhouden zich als de getallen
A 1 en 2
B 1 en 4
C 1 en 12
D 1 en 16

19. Als $\tan \alpha = -\frac{4}{3} \wedge 0° \leqq \alpha \leqq 180°$ dan geldt voor sin α
A $\sin \alpha = \frac{3}{5}$
B $\sin \alpha = \frac{4}{5}$
C $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$
D $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$

20. De grafiek van $x \to x^2$ wordt afgebeeld op de grafiek van $x \to x^2-6x+7$ bij translatie over de vector

A $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ C $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

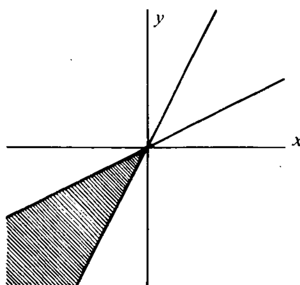
B $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ D $\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

21. Gegeven is een functie f gedefinieerd door $f(x) = -x^2+px+q$.
De oplossingsverzameling van $f(x) = 0$ is $\{-1, 5\}$.
Voor p en q geldt
A $p = -4 \wedge q = -5$
B $p = -4 \wedge q = 5$
C $p = 4 \wedge q = -5$
D $p = 4 \wedge q = 5$

22. $\left\{x|x-1 < \frac{x+1}{-1}\right\} =$

A $\{x|x < 0\}$
B $\{x|x > 0\}$
C $\{x|x < 1\}$
D $\{x|x > 1\}$

23. In nevenstaand assenstelsel zijn de grafieken getekend van $y = 2x$ en $y = \frac{1}{2}x$.
Voor de coördinaten x en y van elk punt van het gearceerde vlakdeel geldt
A $y \geqq 2x \wedge y \geqq \frac{1}{2}x$
B $y \geqq 2x \wedge y \leqq \frac{1}{2}x$
C $y \leqq 2x \wedge y \geqq \frac{1}{2}x$
D $y \leqq 2x \wedge y \leqq \frac{1}{2}x$



24. De bewering $\{x|x^2+p = 0\} = \phi$ is gelijkwaardig met de bewering
A $p < 0$
B $p \leqq 0$
C $p > 0$
D $p \geqq 0$

25. Gegeven lijnstuk $AB = 6$. Punt M is het midden van lijnstuk AB.
$V = \{P|PB = 4 \wedge PM = PA\}$.
V bevat
A geen elementen
B precies 1 element
C precies 2 elementen
D meer dan 2 elementen

Examen
middelbaar algemeen voortgezet onderwijs
in 1976
MAVO 3

Donderdag 13 mei, 9.30 – 11.00 uur

Wiskunde II

Lees dit eerst:

a. Schrijf de uitwerkingen van de volgende vier vraagstukken zo op, dat blijkt hoe de antwoorden verkregen zijn.
b. Bij berekeningen mag, indien een benadering vereist is, gebruik worden gemaakt van tabellen van wortels en goniometrische verhoudingen of van een rekenliniaal.
c. Vragen over puntverzamelingen hebben, tenzij uit het gegeven anders blijkt, betrekking op het platte vlak.
Coördinaten hebben betrekking op een rechthoekig assenstelsel.
Cursief gedrukte kleine letters stellen elementen van de verzameling $\mathbb{R}$ van de reëele getallen voor, tenzij uit het gegeven anders blijkt.
Evenzo wordt, tenzij uit het gegeven anders blijkt, met het geordende paar (x, y) bedoeld: $x \in \mathbb{R}$ en $t \in \mathbb{R}$, m.a.w. $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
Als bij een functie $x \to f(x)$ geen domein is aangegeven, wordt als domein de verzameling van alle reëele getallen bedoeld waarvoor $f(x)$ betekenis heeft.

1. De leerlingen van een scholengemeenschap zijn ingedeeld in groepen. Het aantal leerlingen per groep blijkt uit onderstaande tabel.

Groepsgrootte	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
Aantal groepen	1	0	0	2	0	4	7	0	3	0	5	3

a. Teken een histogram van deze verdeling.
b. Bereken het aantal leerlingen van deze scholengemeenschap.
c. Bereken het gemiddelde aantal leerlingen per groep.
d. Bereken het aantal groepen waarvan de grootte meer dan 15 % van het gemiddelde afwijkt.

2. In een rechthoekig assenstelsel XOY zijn gegeven de lijn l met vergelijking $2x+3y-13 = 0$ en de lijn m met vergelijking $3x-2y = 0$.
De lijnen l en m snijden elkaar in het punt S.
a. Bereken de coördinaten van S.
b. Teken l en m in het rechthoekig assenstelsel.
Bij de translatie over de vector $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ is het punt O het beeld van S.
c. Voor welke p en q geldt dit?
d. Stel een vergelijking op van het beeld van l en een vergelijking van het beeld van m.

3. Van een balk $ABCD.EFGH$ is $AB = 12$, $AD = 6\sqrt{2}$ en $AE = 15$.
Op de ribbe CG ligt het punt P zo, dat $GP = 3$.
a. Toon door berekening aan dat $BD = BP = 6\sqrt{6}$.
b. Bereken de oppervlakte van driehoek BDP en rond de uitkomst af tot een geheel getal.
c. Bereken de grootte van hoek BDP in graden nauwkeurig.

4. De functies f en g met domein $\{x|0 \leqq x \leqq 5\}$ xijn gedefinieerd door $f(x) = x^2-4x+3$ en $g(x) = -x^2+6x-5$.
a. Los op $f(x) = g(x)$.
De functie h is gedefinieerd door $h(x) = f(x)+g(x)$.
b. Bereken $h(3)$.
c. Teken de grafieken van f, g en h in een rechthoekig assenstelsel.
d. Lees uit de figuur af voor welke x geldt $f(x) \leqq g(x) \leqq h(x)$.

Examen middelbaar algemeen voortgezet onderwijs in 1976

MAVO 4

Dinsdag 11 mei, 9.30–11.30 uur

Wiskunde I

Lees dit eerst:
a. Dit gedeelte van het examen bestaat uit dertig vierkeuzevragen.
Bij elke vraag staan vier antwoorden vermeld, voorafgegaan door de letters A, B, C en D; precies één van deze antwoorden is het goede antwoord.
Controleer vóór het einde van dit examen of alle vragen zijn beantwoord; voor een niet-ingevuld antwoord wordt geen enkel punt toegekend.
b. Bij berekeningen mag, indien een benadering vereist is, gebruik worden gemaakt van een rekenliniaal of van tabellen van wortels en goniometrische verhoudingen.

c. Vragen over puntverzamelingen hebben, tenzij uit het gegeven anders blijkt, betrekking op het platte vlak.
Coördinaten hebben betrekking op een rechthoekig assenstelsel.
Cursief gedrukte kleine letters stellen elementen van de verzameling $\mathbb{R}$ van de reële getallen voor, tenzij uit het gegeven anders blijkt.
Evenzo wordt, tenzij uit het gegeven anders blijkt, met het geordende paar (x, y) bedoeld: $x \in \mathbb{R}$ en $y \in \mathbb{R}$, m.a.w. $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
Als bij een functie $x \to f(x)$ geen domein is aangegeven, wordt als domein de verzameling van alle reële getallen bedoeld waarvoor $f(x)$ betekenis heeft.

1. Bij een rotatie over 90° met $O(0, 0)$ als centrum is het beeld van (2, 3)
A $(-3, 2)$
B $(-2, 3)$
C $(2, -3)$
D $(3, -2)$

2. E is de verzameling van de positieve even getallen.
Voor elk tweetal elementen $p \in E$ en $q \in E$ geldt
A $\frac{2p}{q} \in E$
B $\frac{4p}{q} \in E$
C $\frac{pq}{2} \in E$
D $\frac{pq}{4} \in E$

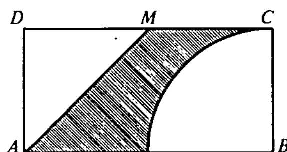
3. Als $3\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ dan geldt voor a en b
A $a \geqq 0 \wedge b \geqq 0$
B $a \geqq 0 \wedge b < 0$
C $a < 0 \wedge b \geqq 0$
D $a < 0 \wedge b < 0$

4. Gegeven zijn $\vec{OA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\vec{OB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.
$AB =$
A 5
B $5\sqrt{2}$
C 7
D $7\sqrt{2}$

5. Van nevenstaande rechthoek $ABCD$ is $AB = 2BC$.
Punt M is het midden van lijnstuk CD.
Verder is een deel getekend van cirkel (B, BC).

Voor elk punt P van het gearceerde vlakdeel geldt

A $d(P, AB) \geqq d(P, AD) \wedge PB \geqq BC$
B $d(P, AB) \geqq d(P, AD) \wedge PB \leqq BC$
C $d(P, AB) \leqq d(P, AD) \wedge PB \geqq BC$
D $d(P, AB) \leqq d(P, AD) \wedge PB \leqq BC$

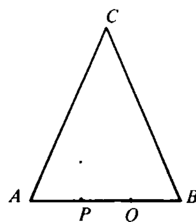


6. Van de rij waarnemingsgetallen 8, 9, 5, 3, p, 10, 5, 4 is de mediaan 6.
Voor p geldt
A $p = 5$
B $p = 6$
C $p = 7$
D $p = 9$

7. De top van de grafiek van $x \to -x^2+2x+1$ is het punt
A $(-1, -2)$
B $(-1, 2)$
C $(1, -2)$
D $(1, 2)$

8. $\{(x, y)|y = -x^2+7\} \cap \{(x, y)|y = 3\} =$
A ϕ
B $\{(2, 3)\}$
C $\{(-2, 3)\}$
D $\{(2, 3), (-2, 3)\}$

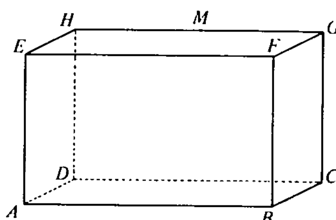
9. Van $\triangle ABC$ is gegeven $AC = BC$.
P en Q zijn punten op lijnstuk AB zo dat $AP = PQ = QB$.
(1) $\triangle APC$ en $\triangle PQC$ hebben gelijke omtrekken.
(2) $\triangle APC$ en $\triangle PQC$ hebben gelijke oppervlakten.
A (1) en (2) zijn beide waar
B (1) is waar, (2) is niet waar
C (1) is niet waar, (2) is waar
D (1) en (2) zijn beide niet waar



10. Als $-1 \in \{x|-a+x = -2\}$ dan geldt voor a
A $a = -3$
B $a = -1$
C $a = 1$
D $a = 3$

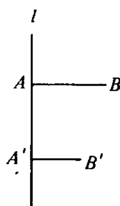
11. Gegevens zijn de punten $A(4, 3)$, $B(3, 4)$ en $C(1, 1)$.
Voor de grootte α van hoek BAC geldt
A $\alpha \leqq 70°$
B $70° < \alpha \leqq 75°$
C $75° < \alpha \leqq 80°$
D $80° < \alpha$

12. Van balk $ABCD.EFGH$ is $AB = 10$, $AE = 3$ en $AD = 4$.
M is het midden van ribbe GH.
Voor de grootte α van hoek AMB geldt
A $60° \leqq \alpha < 70°$
B $70° \leqq \alpha < 80°$
C $80° \leqq \alpha < 90°$
D $90° \leqq \alpha < 100°$

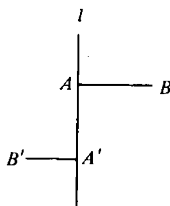


13. Gegeven zijn de functies $f : x \to 0$,
$g : x \to 1$ en
$h : x \to x$.
Er geldt
A $f \cap g = \phi \wedge f \cap h = \phi$
B $f \cap g = \phi \wedge f \cap h \neq \phi$
C $f \cap g \neq \phi \wedge f \cap h = \phi$
D $f \cap g \neq \phi \wedge f \cap h \neq \phi$

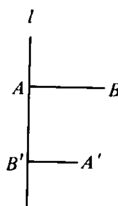
14.



Figuur 1



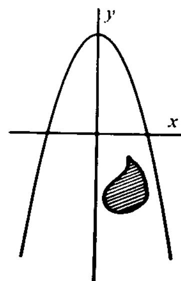
Figuur 2



Figuur 3

In elk van bovenstaande figuren is lijnstuk $A'B'$ het beeld van lijnstuk AB bij een vermenigvuldiging waarbij $A \to A'$ en $B \to B'$.
Het aantal figuren waarin het centrum van vermenigvuldiging op lijn l ligt, bedraagt
A 0
B 1
C 2
D 3

15. In nevenstaand assenstelsel is de grafiek getekend van $y = -x^2+4$.
Voor de coördinaten x en y van elk punt van het gearceerde vlakdeel geldt
A $y > -x^2+4 \wedge x > 0$
B $y > -x^2+4 \wedge x < 0$
C $y < -x^2+4 \wedge x > 0$
D $y < -x^2+4 \wedge x < 0$



16. Voor de coördinaten x en y van elk punt van het eerste kwadrant geldt
A $y > x+1$
B $y > x-1$
C $y > -x+1$
D $y > -x-1$

17. $\{(x, y)|y = -2x+q\} \cap \{(x, y)|y = px\} = \phi$.
Voor p en q geldt
A $p = -2 \wedge q = 0$
B $p = -2 \wedge q \neq 0$
C $p \neq -2 \wedge q = 0$
D $p \neq -2 \wedge q \neq 0$

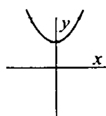
18. Van ruit $ABCD$ is O het snijpunt van de diagonalen.
(1) $\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}+\vec{OD} = \vec{o}$
(2) $|\vec{OA}+\vec{OB}| = |\vec{OC}+\vec{OD}|$

A (1) en (2) zijn beide waar
B (1) is waar, (2) is niet waar
C (1) is niet waar, (2) is waar
D (1) en (2) zijn beide niet waar

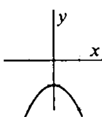
19. Er wordt gespiegeld in de y-as.
Het beeld van de grafiek van $y = ax+b$ is de grafiek van
A $y = ax+b$
B $y = ax-b$
C $y = -ax+b$
D $y = -ac-b$

20. $\{x|-2 \leqq x \leqq 2\}$ is het domein van de functies
$f = \{(x, y)|y = x+3\}$ en $g = \{(x, y)|y = -x+3\}$.
(1) $\{y|1 \leqq y \leqq 5\}$ is het bereik van f.
(2) $\{y|1 \leqq y \leqq 5\}$ is het bereik van g.
A (1) en (2) zijn beide waar
B (1) is waar, (2) is niet waar
C (1) is niet waar, (2) is waar
D (1) en (2) zijn beide niet waar

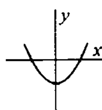
21.



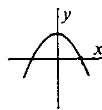
Figuur 1



Figuur 2



Figuur 3

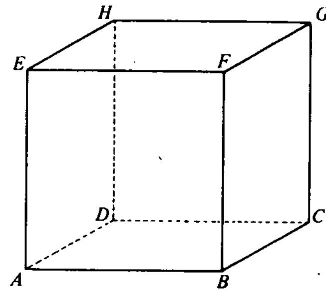


Figuur 4

In welke van bovenstaande figuren is de grafiek getekend van de functie $f : x \rightarrow -(x-1)(x+1)$?
A in figuur 1
B in figuur 2
C in figuur 3
D in figuur 4

22. De bewering $\sin \alpha < \cos \alpha$ is waar voor *elke* α met
A $0° < \alpha < 90°$
B $90° < \alpha < 180°$
C $180° < \alpha < 270°$
D $270° < \alpha < 360°$

23. In kubus *ABCD.EFGH* is de cosinus van hoek *BHD* gelijk aan *p*.
Voor *p* geldt
A $p \leqq 0,5$
B $0,5 < p \leqq 0,6$
C $0,6 < p \leqq 0,7$
D $0,7 < p$



24. $\left\{x \mid \frac{-3x-15}{2} < 0\right\} =$
A $\{x|x > 5\}$
B $\{x|x < 5\}$
C $\{x|x > -5\}$
D $\{x|x < -5\}$

25. $\{x|-x^2+4x > x\} =$
A $\{x|-3 < x < 0\}$
B $\{x|x < -3 \vee x > 0\}$
C $\{x|x < 0 \vee x > 3\}$
D $\{x|0 < x < 3\}$

26. De oppervlakte van een cirkelschijf is gelijk aan $\frac{4}{9}\pi$.
De omtrek van deze cirkelschijf is gelijk aan
A $\frac{2}{3}\pi$
B $\frac{2}{3}\pi^2$
C $\frac{4}{3}\pi$
D $\frac{4}{3}\pi^2$

27. Gegeven zijn twee cirkels met ongelijke stralen,
Het aantal lijnen die *beide* cirkels raken, is ten hoogste
A 2
B 3
C 4
D 5

28. Gegeven zijn een lijn l en een punt A.
$V = \{P|d(P, l) = 3\}$ en $W = \{P|PA = 3\}$.
Het aantal elementen van $V \cap W$ kan *niet* zijn
A 0
B 1
C 2
D 3

29. $\{x|x^2-4x+p = 0\} = \phi$.
Voor p kan gelden
A $p = 2$
B $p = 3$
C $p = 4$
D $p = 5$

30. Van een functie $f : x \to -x^2+2x+p$ is gegeven $f(x) < 0$ voor elke x.
Voor p geldt
A $p < -1$
B $-1 < p < 0$
C $0 < p < 1$
D $1 < p$

Examen middelbaar algemeen voortgezet onderwijs in 1976 MAVO 4

Donderdag 13 mei, 9.30 – 11.30 uur

Wiskunde II

Lees dit eerst:

a. Schrijf de uitwerkingen van de volgende vier vraagstukken zo op, dat blijkt hoe de antwoorden verkregen zijn.

b. Bij berekeningen mag, indien een benadering vereist is, gebruik worden gemaakt van tabellen van wortels en goniometrische verhoudingen of van een rekenliniaal.

c. Vragen over puntverzamelingen hebben, tenzij uit het gegeven anders blijkt, betrekking op het platte vlak.
Coördinaten hebben betrekking op een rechthoekig assenstelsel.
Cursief gedrukte kleine letters stellen elementen van de verzameling $\mathbb{R}$ van de reële getallen voor, tenzij uit het gegeven anders blijkt.
Evenzo wordt, tenzij uit het gegeven anders blijkt, met het geordende paar

(x, y) bedoeld: $x \in \mathbb{R}$ en $y \in \mathbb{R}$ m.a.w. $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
Als bij een functie $x \to f(x)$ geen domein is aangegeven, wordt als domein de verzameling van alle reële getallen bedoeld waarvoor $f(x)$ betekenis heeft.

1. In een rechthoekig assenstelsel XOY zijn gegeven de relaties
   $C = \{(x, y) | (x-2)^2+(y-1)^2 = 17\}$ en $L = \{(x, y) | x+y = 8\}$.
   a. Gegeven is $(a, 0) \in C$.
   Bereken a.
   b. Gegeven is $(0, b) \in C$
   Bereken b.
   c. Gegevens is $(p, q) \in C \cap L$.
   Bereken p en q.
   d. Teken de grafieken van C en L.
   e. Geef de elementen van de verzameling
   $\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | (x-2)^2+(y-1)^2 > 17\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | x+y = 8\}$.

2. In een rechthoekig assenstelsel XOY zijn gegeven de vectoren

   $$\vec{OA} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{OB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

   a. Bewijs dat $|\vec{OA}| = |\vec{OB}|$.
   b. Bewijs dat de vectoren $\vec{OA}$ en $\vec{OB}$ loodrecht op elkaar staan.
   c. De lijn AB snijdt de y-as in het punt C.
   Druk de vector $\vec{OC}$ uit in $\vec{OA}$ en $\vec{OB}$.
   d. Van de vector $\vec{OD} = \begin{pmatrix} 2 \\ k \end{pmatrix}$ is gegeven dat het eindpunt D op de lijn AB ligt.
   Bereken k.

3. Van een balk $ABCD.EFGH$ is gegeven $AB = 20$, $AD = 12$ en $AE = 9$.
   a. Bereken de sinus van $\angle ABH$.
   Op de ribbe EH ligt het punt P zo, dat $HP = 3$.
   De lichaamsdiagonaal BH snijdt het lijnstuk CP in het punt Q.
   b. Toon aan dat $BQ = \frac{4}{5}BH$.
   c. Op de ribbe AB ligt het punt R zo, dat $\angle BRQ = 120°$.
   Bereken QR.

4. De functie f met domein $\{x | -4 \leqq x \leqq 4\}$ is als volgt gedefinieerd:
   voor $-4 \leqq x \leqq 0$ is $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$
   en voor $0 < x \leqq 4$ is $f(x) = -x^2+4x-2$.
   De functie g met domein $\{x | -4 \leqq x \leqq 4\}$ is gedefinieerd door
   $g(x) = -x+2$
   a. Bereken $f(-2)$ en $f(2)$.
   b. Los op $f(x) = 0$.
   c. Los op $f(x) = g(x)$.
   d. Teken de grafieken van f en g in een rechthoekig assenstelsel en geef met behulp van de figuur de oplossingsverzameling van $0 \leqq f(x) \leqq g(x)$.

Examen hoger algemeen voortgezet onderwijs in 1976

Donderdag 13 mei, 9.30 – 12.30 uur

Wiskunde

Schrijf de uitwerkingen van de onderdelen van de volgende vijf vraagstukken zo op dat duidelijk blijkt hoe de antwoorden verkregen zijn.

1. Aan een diner nemen vijf echtparen deel.
   Er zijn tien uiterlijk gelijke briefjes gemaakt waarvan iedere persoon na afloop er één ontvangt.
   Op twee van die briefjes staat een kruis getekend.
   Wie een briefje heeft gekregen met een kruis erop, moet afwassen.
   a. Hoe groot is de kans dat twee dames moeten afwassen?
   b. Hoe groot is de kans dat een heer en een dame moeten afwassen?
   c. Hoe groot is de kans dat een echtpaar moet afwassen?

2. Voor elk reëel getal a is gegeven de functie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$

$$f_a : x \to \frac{3x+3a}{x^2+ax+a}.$$

   a. Onderzoek de functie f_1 en teken de grafiek van deze functie.
   b. Voor welke a heeft de grafiek van f_a geen verticale asymptoot?
   c. Los op: $f_4(x) > f_0(x)$.

3. In R_2 is ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel gegeven de lijn l met vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   a. Men past op l de rotatie om $O(0, 0)$ over de hoek $-\frac{1}{2}\pi$ toe, gevolgd door de translatie over de vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$
   Geef een vergelijking van het beeld van l.
   b. Op l liggen de punten A en B.
   B is het beeld van A bij de rotatie om $O(0, 0)$ over de hoek $-\frac{1}{2}\pi$.
   Bereken de coördinaten van A en van B.

4. Gegeven zijn van $[0, \pi]$ naar $\mathbb{R}$ de functies
   $f : x \to \sqrt{6} \sin x$ en $g : x \to -2 \cos x$.
   a. Los op: $f(x) = g(x)$.
   b. Teken in één figuur de grafieken van f en g.
   c. Onderzoek of de grafieken van f en g elkaar loodrecht snijden.

5. In R_3 zijn ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel gegeven de punten $O(0, 0, 0)$, $A(4, 0, 0)$, $C(0, 4, 0)$ en $D(0, 0, 4)$.

Deze punten zijn hoekpunten van de kubus $OABC.DEFG$.
Punt K is het midden van de ribbe DE; punt L is het midden van de ribbe DG; punt M is het midden van de ribbe BC.
a. Bewijs dat de lijn EL loodrecht op het vlak DOM staat.
b. Op de lijn BD ligt een punt R zo dat de lijnstukken LR en MR even lang zijn.
Bereken de coördinaten van R.
c. Bewijs dat voor elk punt P van de lijn CG en elk punt Q van de lijn BK geldt: het midden van het lijnstuk PQ ligt in het vlak DOM.

Examen voorbereid wetenschappelijk onderwijs in 1976 (Gymnasium en Atheneum)

Donderdag 13 mei, 9.30 – 12.30 uur

Wiskunde I

Alle kandidaten maken de opgaven 1, 2, 3 en 4 met één uitzondering: alleen de kandidaten die in 1975 bij het V.W.O.-examen afgewezen werden, alsmede de staatsexamenkandidaten, mogen opgave 4 vervangen door opgave 5.

1. Gegeven is van $[-1, 8]$ naar $\mathbb{R}$ de functie $f: x \to -2x + 3\sqrt[3]{x^2}$.
a. Bewijs dat deze functie in $x = 0$ niet differentieerbaar is.
b. Onderzoek de functie f en teken de grafiek van f.
c. Bereken de oppervlakte van het vlakdeel ingesloten door de grafiek van f en de x-as.

2. Gegeven is de differentiaalvergelijking $(2x + y)\mathrm{d}y = (2x^3 + 4y)\mathrm{d}x$.
a. Teken de verzameling van de punten waarin het lijnelement dat aan de differentiaalvergelijking voldoet, een negatieve richtingscoëfficiënt heeft.
b. Welke tweedegraadsfuncties voldoen aan de differentiaalvergelijking?
c. De lijn l raakt een integraalkromme van de differentiaalvergelijking in het punt $P(1, 1)$.
Bewijs dat P het enige punt van l is waarin l een integraalkromme van de differentiaalvergelijking raakt.

3. Voor elke $p \in \mathbb{R}$ is de functie f_p van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ gegeven door $x \to x e^{-px^3}$.
a. Bewijs dat er een punt is waarin de grafieken van alle functies f_p elkaar raken.
b. G is het vlakdeel ingesloten door de x-as, de grafiek van f_1 en de lijn $x = 1$.

Bereken de inhoud van het lichaam dat ontstaat bij wenteling van G om de x-as.

c. Voor welke $p \in \mathbb{R}$ heeft de functie f_p een maximum?
Noem dit maximum y_p en het bijbehorende origineel x_p.
Gevraagd de verzameling van de punten (x_p, y_p).

4. In een vaas bevinden zich k rode en n blauwe dobbelstenen.

a. Trek aselect uit de vaas een dobbelsteen en werp hiermee.
De kans op de kleur rood en de worp 6 is gelijk aan $\frac{1}{26}$.
Leg de getrokken dobbelsteen niet terug in de vaas.
Trek aselect uit de vaas een tweede dobbelsteen en werp hiermee.
Onder voorwaarde dat de eerste dobbelsteen rood was, is de kans op de kleur blauw en de worp 6 gelijk aan $\frac{2}{15}$.
Hoeveel dobbelstenen bevonden zich aanvankelijk in de vaas?

b. Neem aan dat $n = k+4$.
Trek aselect zonder teruglegging twee dobbelstenen uit de vaas.
De kans dat één van de dobbelstenen rood en de andere blauw is, is groter dan $\frac{1}{2}$.
Leg de twee getrokken dobbelstenen terug in de vaas.
Trek aselect weer twee dobbelstenen uit de vaas, maar nu met teruglegging.
Bereken het minimum van de kans dat één van de dobbelstenen rood en de andere blauw is.

5. Voor elke $p \in \mathbb{R}$ is de functie f_p van $\langle 0, \pi \rangle$ naar $\mathbb{R}$ gegeven door

$$f_p(x) = \frac{p+\sin x}{\sin 2x}.$$

a. Los op: $f_1(x) - f_2(x) > 1$.

b. Bereken het bereik van de functie $x \to f_1(x) : f_2(x)$.

c. Voor welke p geldt: de oplossingsverzameling van de vergelijking $f_p(x) = \tan x$ is leeg?

Examen voorbereid wetenschappelijk onderwijs in 1976 (Gymnasium en Atheneum)

Vrijdag 14 mei, 9.30 – 12.30 uur

Wiskunde II

Schrijf de uitwerkingen van de onderdelen van de volgende drie vraagstukken zo op dat duidelijk blijkt hoe de antwoorden verkregen zijn.

1. In R_3 zijn ten opzichte van een orthonormale basis gegeven de punten $A(0, 0, 1)$ en $B(0, 0, -1)$.
Lijn l gaat door A en is evenwijdig aan de x_1-as, lijn m gaat door B en is evenwijdig aan de x_2-as.
   a. Op l ligt een punt P en op m een punt Q zo dat de lijn PQ gelijke hoeken maakt met l en m.
   Bewijs dat $AP = BQ$.
   b. Op l ligt een punt C en op m een punt D zo dat $CD = 7$.
   Op het lijnstuk CD ligt punt E zo dat $CE : ED = 1 : 2$.
   Bewijs dat de punten E op een ellips liggen.
   c. Er zijn orthogonale afbeeldingen die de lijn l op de lijn m afbeelden.
   Bereken de matrix van elk van deze afbeeldingen.

2. In R_3 zijn ten opzichte van een orthonormale basis gegeven punt $P(0, 0, 3)$,

$$\text{lijn } l : \bar{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ en vlak } V : -x_1 + x_2 + x_3 = 6.$$

   a. Bewijs dat er geen bol bestaat die door P gaat, vlak V raakt en waarvan het middelpunt op lijn l ligt.
   b. Een lijn door P snijdt lijn l in punt A en vlak V in punt B, waarbij A tussen P en B ligt zo dat $PA : AB = 1 : 3$.
   Bereken de coördinaten van B.
   c. Lijn m gaat door P.
   De loodrechte snijlijn s van l en m ligt in vlak V.
   Stel een vectorvoorstelling op van elk van de lijnen s en m.

3. Ten opzichte van een orthonormale basis in R_2 is voor elke $k \in \mathbb{R}$ de afbeelding A_k van R_2 naar R_2 gegeven door de matrix $\begin{pmatrix} -2k & 4k-1 \\ -k+1 & 2k \end{pmatrix}$.
   a. Bewijs dat er een k bestaat waarvoor de beeldruimte (het bereik) en de kern van A_k samenvallen.
   b. Voor elke $m \in \mathbb{R}$ is B_m de afbeelding met matrix $\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$.
   Gegeven is dat het $B_m \circ A_2$-beeld van de hyperbool met vergelijking $x_1x_2 = 8$ het punt $(1, -2)$ bevat.
   Bereken m.
   c. Bewijs:
   er bestaat één lijn door $O(0, 0)$ die voor elke $k \in \mathbb{R}$ loodrecht op zijn A_k-beeld staat; voor elke andere lijn l door O is er een $k \in \mathbb{R}$ te vinden zo dat het A_k-beeld van l samenvalt met l.

Een suggestie n.a.v. het vraagstuk over vectoren op het C.S.E. Mavo-4 1976

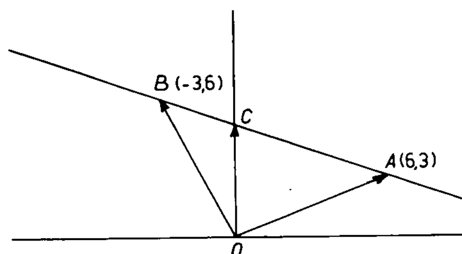
A. J. L. Osté

Vlissingen

Opgave 2 van de open vraagstukken van het C.S.E. Mavo-4 1976 luidde als volgt:
In een rechthoekig assenstelsel *XOY* zijn gegeven de vectoren

$$\vec{OA} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{OB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

a) Bewijs, dat $|\vec{OA}| = |\vec{OB}|$
b) Bewijs, dat de vectoren $\vec{OA}$ en $\vec{OB}$ loodrecht op elkaar staan.
c) De lijn *AB* snijdt de *Y*-as in het punt *C*.
Druk de vector $\vec{OC}$ uit in $\vec{OA}$ en $\vec{OB}$.
d) Van de vector $\vec{OD} = \begin{pmatrix} 2 \\ k \end{pmatrix}$ is gegeven, dat het eindpunt *D* op de lijn *AB* ligt.
Bereken *k*.



De delen a en b van deze opgave zullen de kandidaten weinig problemen hebben opgeleverd. De problemen begonnen pas bij deel c. Ik heb me daar namelijk afgevraagd welk antwoord de makers van dit vraagstuk hier verwachtten. Stelt men $\vec{AC} = p.\vec{AB}$, waarin p een parameter voorstelt, dan geldt: $\vec{OC} = \vec{OA} + p.\vec{AB}$ of $\vec{OC} = \vec{OC} + p(-\vec{OA} + \vec{OB})$ dus $\vec{OC} = (1-p).\vec{OA} + p.\vec{OB}$. Hiermee is dan strikt genomen aan de opdracht voldaan!
Toch zou ik me kunnen voorstellen, dat hier tegenin gebracht kan worden, dat op eenvoudige wijze kan worden aangetoond, dat de waarde van de parameter p $\frac{2}{3}$ moet zijn, zodat $\vec{OC} = \frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{2}{3}\vec{OB}$
Als dit laatste de bedoeling van de makers van het vraagstuk is geweest, zou de vraagstelling een stuk duidelijker zijn geworden als vooraf bij voorbeeld de verhouding *AC* : *CB* zou zijn gevraagd te berekenen.

Bij deel d was het de bedoeling dat de kandidaten allereerst zouden vinden, dat de vergelijking van de drager van het lijnstuk AB $y = -\frac{1}{3}x+5$ is, waarna zij in deze vergelijking de coördinaten van het punt $D = (2, k)$ moesten substitueren om zodoende de waarde van k te vinden. De door de commissie vaststelling opgaven vastgestelde normen waren op deze oplossing van toepassing.
Een werkwijze, die in het kader van het doel van dit vraagstuk naar mijn smaak veel mooier is, is de volgende:
Omdat het eindpunt van de vector $\vec{OD}$ op de drager van AB ligt geldt:

$$\vec{OD} = \vec{OA}+p.\vec{AB} \qquad (1)$$

Daar van de vectoren $\vec{OA}$en $\vec{OB}$ de kentallen gegeven zijn, kan voor (1) geschreven worden:

$$\begin{pmatrix}2\\k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}+p.\begin{pmatrix}-9\\3\end{pmatrix} \text{ of } \begin{pmatrix}2\\k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}+p.\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$$

Uit deze betrekking volgt

$$\begin{cases}2 = 6-3p\\ k = 3+p\end{cases}$$

Na eliminatie van p vindt men hieruit de waarde van k.
Helaas mag men deze laatste oplossingsmethode van een Mavo-kandidaat niet verwachten, omdat de behandeling van de vectorvoorstelling van een rechte niet tot de examenstof behoort. Immers een Mavo-4 kandidaat hoeft alleen maar op de hoogte te zijn van het begrip vector, de elementaire operaties met vectoren in R_2 en enkele eenvoudige toepassingen met vectoren.
Het onderwerp vectoren blijft hierdoor naar mijn smaak een te op zichzelf staand geheel dat wat steriel overkomt.
Ik zou van deze gelegeheid gebruik willen maken ervoor te pleiten om de vectorvoorstelling van een rechte lijn in R_2 wèl op te nemen in het examenprogramma voor Mavo-4. De mogelijkheid wordt zodoende gecreëerd het verband te leggen tussen de vectorvoorstelling en de vergelijking van de rechte in R_2, waardoor het onderwerp vectoren wat zinvoller in het geheel van het leerplan kan worden geïntegreerd.
Ik ben me er terdege van bewust dat hierdoor aan het toch al omvangrijke examenprogramma weer een brok stof wordt toegevoegd. Maar misschien kan dit gecompenseerd worden door een ander onderwerp in te krimpen of geheel te schrappen (b.v. het onderwerp beschrijvende statistiek).
Wellicht kan dit bij een toekomstige evaluatie van het huidige wiskunde leerplan overwogen worden.

Reactie op het V.W.O.-eindexamen 1976

C. RIJKE
Hardinxveld-Giessendam,

Opmerkingen over vraag 1a van wiskunde I

De opgave was: Gegeven is van $[-1, 8]$ naar $\mathbb{R}$ de funktie f: $x \to -2x + 3\sqrt[3]{x^2}$.
a. Bewijs dat deze funktie in $x = 0$ niet differentiëerbaar is.
Een juiste en wel de meest direkte oplossing van dit vraagstuk verloopt via de definitieformule voor de afgeleide:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \left(-2 + \frac{3}{\sqrt[3]{h}} \right) \text{ bestaat niet.}$$

Vele kandidaten echter zullen geprobeerd hebben het bewijs te leveren via de afgeleide funktie

$$f' : x \to -2 + \frac{2}{\sqrt[3]{x}}, \qquad x \neq 0. \text{ Kan dat?}$$

De volgende werkwijze levert een sluitend bewijs in het onderhavige geval:
1*e stap* f' is in 0 nog niet gedefinieerd. Dit wordt door kandidaten meestal meteen aangezien voor een bewijs, dat $f'(0)$ niet bestaat (ten onrechte uiteraard!).
2*e stap* We konstateren dat f in 0 kontinu is. Was dat niet zo dan was het bewijs af, aangezien een diskontinuïteit de niet-differentieerbaarheid met zich meebrengt.
3*e stap* Bekijk vervolgens

$$\lim_{x \downarrow 0} f'(x) \text{ en } \lim_{x \uparrow 0} f'(x).$$

Deze leveren op resp. $+\infty$ en $-\infty$.
Nu is de conclusie gewettigd: De raaklijn in (0, 0) aan de grafiek is vertikaal. En dus is het bewijs geleverd!
Verantwoording van de 3e stap: Als f kontinu is op $[0, h]$ dan is

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = f'(k), \qquad 0 \leqq k \leqq h$$

(middelwaardestelling). Het is duidelijk, dat als $f'(k)$ tot a (a eindig of oneindig) nadert, wanneer h en dus ook k tot 0 nadert, dat dan het differentiequotiënt

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} \text{ in } x = 0$$

dezelfde limiet heeft.

Met deze methode, die zonder veel moeite ook aan leerlingen kan worden uitgelegd, is het echter oppassen! Als de limieten, genoemd bij de 3e stap geen antwoord opleveren (niet eindig en niet oneindig) dan kan er over differentieerbaarheid géén beslissing genomen worden. Bezien wij tenslotte hiervoor als voorbeeld de funktie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ $f: x \to x^2 \sin 1/x$ met bovendien $f(0) = 0$.
1e stap: $f' : x \to 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$. Voor $x = 0$ geen antwoord.
2e stap: $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin(1/x) = 0$, dus f is in 0 kontinu.
3e stap: $\lim\limits_{x\downarrow 0} f'(x)$ en $\lim\limits_{x\uparrow 0} f'(x)$ bestaan niet, immers $\lim\limits_{x\to 0} 2x \sin(1/x) = 0$, maar $\lim\limits_{x\to 0} \cos(1/x)$ bestaat niet. Is nu f in 0 ook niet differentieerbaar? Het antwoord is: ja!
De definitieformule levert (veilig en snel):

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} h \sin\frac{1}{h} = 0$$

en dus is f in 0 wél differentieerbaar.

II Vraag 3c van Wiskunde II is INCORRECT

De opgave was: Ten opzichte van een orthonormale basis in R_2 is voor elke $k \in \mathbb{R}$ de afbeelding A_k van R_2 naar R_2 gegeven door de matrix

$$\begin{pmatrix} -2k & 4k-1 \\ -k+1 & 2k \end{pmatrix}.$$

c. Bewijs:
i. er bestaat één lijn door $O(0, 0)$ die voor elke $k \in \mathbb{R}$ loodrecht op zijn A_k-beeld staat;
ii. voor elke andere lijn l door O is er een $k \in \mathbb{R}$ te vinden zo dat het A_k-beeld van l samenvalt met l.

De oplossing van dit vraagstuk kan als volgt verlopen:
Stel l door O heeft vektorvoorstelling

$$\bar{x} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \qquad a \neq 0 \vee b \neq 0.$$

Het A_k-beeld van deze lijn is:

$$A_k l: \bar{x} = \lambda \begin{pmatrix} -2ka + (4k-1)b \\ (-k+1)a + 2kb \end{pmatrix}.$$

We moeten nu eerst bezien of $A_k l$ wel een lijn is! $A_k l$ is de nulvektor als het stelsel

$$\begin{cases} -2ka + (4k-1)b = 0 \\ (-k+1)a + 2kb = 0 \end{cases}$$ afhankelijk is, immers: $a \neq 0 \vee b \neq 0$.

Resultaat: $k = 1/5$ en $2a + b = 0$. Ofwel: de lijn met vektorvoorstelling

$$\bar{x} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

is de enige lijn door O, die afgebeeld kan worden op O; dit gebeurt alleen als $k = 1/5$.

Nu bewijs i. Er moet gelden: $A_k l \perp l$ voor alle $k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -2ka^2+(4k-1)ab+(-k+1)ab+2kb^2 = 0 \Leftrightarrow k(2a+b)(-a+2b) = 0 \Leftrightarrow k = 0 \vee 2a+b = 0 \vee -a+2b = 0$. Hieruit:

Als $k = 0$, dan staat iedere lijn loodrecht op zijn beeldlijn.

Als l: $\bar{x} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, dan $A_k l$ loodrecht op l voor alle $k \in \mathbb{R}$ behalve $k = 1/5$.

Voor $k = 1/5$ is het beeld van l de nulvektor.

Als l: $\bar{x} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, dan $A_k l$ loodrecht op l voor alle $k \in \mathbb{R}$.

Vervolgens bewijs ii.: Uit wat hierboven staat volgt reeds, dat er TWEE lijnen zijn door O die niet aan het gestelde voldoen, nl.:

Als l: $\bar{x} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ dan altijd $A_k l$ loodrecht op l óf $A_k l$ is de nulvektor.

Als l: $\bar{x} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan altijd $A_k l$ loodrecht op l.

In een 'bewijs' is dit als volgt terug te vinden: $A_k l$ valt samen met l als het stelsel

$$\left\{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2ka+(4k-1)b \\ (-k+1)a+2kb \end{pmatrix}\right\}$$

een afhankelijk stelsel is, waarin beide vektoren ongelijk de nulvektor zijn. De laatste vektor kan de nulvektor zijn als

$$l: \bar{x} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{(zie boven)}$$

De voorwaarde voor afhankelijkheid geeft: $(-k+1)a^2+2kab+2kab-(4k-1)b^2 = 0 \Leftrightarrow$

$$k = \frac{a^2+b^2}{(a-2b)^2} \wedge a \neq 2b.$$

De éne uitzondering staat er al; de ándere vinden we door

$$l: \bar{x} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

te nemen, immers dan geeft invullen in deze formule juist $k = 1/5$.

Over de niet-differentieerbaarheid van f op het examen wiskunde I (v.w.o. '76)

R. KOOISTRA

Ede

Het eerste onderdeel van vraagstuk 1 van bovenvermeld examen luidde:
Bewijs dat $f: x \to -2x + 3\sqrt[3]{x^2}$ *in* $x = 0$ *niet differentieerbaar is.*
Over de aard van dit bewijs zal in den lande wel niet overal gelijk gedacht zijn. De leerling, die keurig het differentie-quotiënt van f op $[0, h]$ opstelt en laat zien, dat de limiet hiervan voor $h \to 0$ niet bestaat, valt natuurlijk buiten discussie en krijgt het volle aantal van zes punten. Niet aan alle scholen zal dit puntenaantal toegekend zijn aan de kandidaat, die argeloos gaat differentiëren: $f'(x) = -2+2x^{-\frac{1}{3}}$ en dan constateert dat f' voor $x = 0$ kennelijk niet gedefinieerd is en dus f niet differentieerbaar in $x = 0$ (een bewijs overigens, dat men ook in leerboeken kan aantreffen; in hetgeen volgt aan te duiden met bewijs a).
Vraagt men nu, waarom dit foutief is of althans niet geheel juist – ik moet nog de functie zien, waarbij bewijs a tot een onjuist resultaat zou leiden – dan kan men ten antwoord krijgen: 'Wij zien toch wel graag een limiet.' Welaan, dat kan! De leerling, die zijn zaakjes kent, komt, zoals hem dat bij functies met twee verschillende functie-voorschriften geleerd is, aandraven met:

$$\lim_{x \uparrow 0} f'(x) = \lim_{x \downarrow 0} f'(x)$$

(aan te duiden met bewijs b) en menig leraar zal goedkeurend knikken. Nu moeten we echter wel even bedenken, dat, als bewijs a aanvechtbaar is, dit in veel grotere mate geldt voor bewijs b en dat om twee redenen.
In de eerste plaats is bewijs b alleen juist, als bekend is, dat de functie f in $x = 0$ *continu* is. Het onderzoek hiervan zal dus aan b moeten voorafgaan. Laten we dit aan de hand van een voorbeeld toelichten. Het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde nam onlangs (jg. 62, afl. 1, blz. 44) in zijn vraagstukkenrubriek de volgende opgave op:

Is g, *gedefinieerd door* $g(x) = x^2+1$ *als* $x \leqq 0$ *en* $g(x) = x^2$ *als* $x > 0$ *een differentieerbare functie?*

Keurig geldt:

$$\lim_{x \uparrow 0} g'(x) = \lim_{x \downarrow 0} g'(x) (= 0)$$

maar uiteraard is vanwege de discontinuïteit in $x = 0$ van differentieerbaarheid geen sprake.
Nu komt er voor de functie f van het eindexamen nog iets bij: de bovengenoemde linker- en rechterlimiet bestaan niet. Dit te constateren bij één van de beide limieten zou dus al voldoende zijn om tot de niet-differentieerbaarheid in $x = 0$ te besluiten, maar doet de doorsnee-kandidaat dat? Welnee, hij bepaalt beide limieten en vindt voor de linkerlimiet $-\infty$, voor de rechterlimiet $+\infty$ en is dat ongelijk of niet? Ik zou graag willen weten wat hij gedaan zou hebben als beide limieten positief oneindig (of beide negatief oneindig) waren geweest, zoals dat bv. het geval is bij de functie $h: x \to \sqrt[3]{x}$. Ongetwijfeld was hij in moeilijkheden gekomen of had, zo hij de moed bezat, toch tot differentieerbaarheid besloten. Meetkundig bezien zou voor die differentieerbaarheid nog zeer wel te pleiten zijn. Bij de grafiek van h immers gaat het gedeelte op het interval $\langle\leftarrow, 0]$ vloeiend over in dat op $\langle 0, \rightarrow\rangle$; de raaklijn in (0, 0) is dan ook een lijn en niet een halve lijn. Men zou in deze situatie K. Wagner nog wel willen bijvallen als hij uitspreekt:

'*Eine Funktion f ist bei x_0 differenzierbar genau dann, wenn f bei x_0 eine Tangente besitzt.*'

(K. Wagner. Analysis I uit de Tutorial-reeks, blz. 63).
De keerpuntsraaklijn in O aan de grafiek van f moge aantonen, dat we met Wagner's uitspraak voorzichtig moeten zijn.

Korrel

Drs. W. E. DE JONG

Drachten

In het eerste vraagstuk van het eindexamen 1976 van wiskunde I (v.w.o.) werd gevraagd aan te tonen dat de functie

$$f(x) = -2x + 3\sqrt[3]{x^2}$$

niet differentieerbaar is in $x = 0$.
Het bewijs kan direct gegeven worden via de definitie van het begrip differentieerbaarheid:

$$f(x) = -2x + 3\sqrt[3]{x^2}$$

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{-2h + 3\sqrt[3]{h^2} - 0}{h} = -2 + \frac{1}{\sqrt[3]{h}},$$

dus $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h) - f(0)}{h}$ bestaat niet. Daarom is f niet differentieerbaar in $x = 0$.

De redenering:
'$\lim_{h\to 0} f'(x)$ bestaat niet, dus f is in $x = 0$ niet differentieerbaar', is onvolledig.
De gebruikte stelling is namelijk niet juist.
Een bekend tegenvoorbeeld levert de functie f van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$, gedefinieerd door:

$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} \text{ voor } x \neq 0$$
$$f(0) = 0$$

$\lim_{x\to 0} f'(x)$ bestaat niet. Toch is

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} h \sin \frac{1}{h} = 0,$$

dus de functie is differentieerbaar in $x = 0$.
Wel kunnen de volgende stellingen bewezen worden:

1. Als f continu is in $x = a$ en differentieerbaar in een gereduceerde omgeving van $x = a$, terwijl $\lim_{x\to a} f'(x)$ bestaat, is f differentieerbaar in $x = a$ en is

   $$f'(a) = \lim_{x\to a} f'(x).$$

2. Als linker- en rechterlimiet van $f'(x)$ in $x = a$ verschillen, is f niet differentieerbaar in $x = a$.
3. Als $\lim f'(x) = \pm\infty$, is f niet differentieerbaar in $x = a$.

De laatste stelling zou gebruikt kunnen worden in het onderhavige geval, al is een direct bewijs, als hierboven aangegeven, uiteraard fraaier.
Als een leraar de genoemde stellingen in zijn onderwijs gebruikt, doet hij er goed aan ze expliciet te formuleren, ook al acht hij het geven van een bewijs te moeilijk of anderszins ongewenst. Het geeft hem bovendien een goede gelegenheid de leerlingen te laten zien dat intuïtie weliswaar belangrijk is bij het beoefenen van de wiskunde, maar dat het bewijzen van wat men intuïtief aanvoelt, niet zinloos is.

Eindexamen Wiskunde II

A. H. NICOLAÏ

Groningen

Zoals bekend is het dit jaar bij wiskunde 2 voorgekomen, dat de kandidaten gevraagd werd te bewijzen, dat een punt op een ellips lag (vraag 1b).
Ik heb de inspectie geschreven, dat het m.i. niet juist is, dat men kennis omtrent de ellips aanwezig veronderstelt, aangezien dit onderwerp niet op het programma voorkomt.
Hierop kreeg ik een gestencild antwoord van de 'commissie vaststelling opgaven', waarin wordt verwezen naar twee verslagen gepubliceerd in Euclides van 72–73 en 73–74, aangevuld met een wat enigmatiek aandoende regel: 'In het examenprogramma komt het onderwerp puntverzamelingen voor'.
In de verslagen staat als belangrijkste, dat de kegelsneden in eenvoudige vorm b.v. bij relaties wel aan de orde komen, resp. dat de kegelsneden in het examenprogramma niet waren opgenomen en derhalve zeer summier behandeld kunnen worden. De C.V.O. acht hiermee de vraag over de ellips gerechtvaardigd.

Zelf ben ik destijds in Zwolle geweest op een voorlichtingsbijeenkomst met de inspectie. Ik meen mij zeker te kunnen herinneren, dat de inspecteur zich hierover toen heeft uitgelaten in de trant van 'als U eens een kromme wilt tekenen, teken dan eens een ellips of een hyperbool'.
Ik heb hieraan voldaan bij het keuzeonderwerp voor W2 (ik koos relativiteitstheorie, waarbij men al gauw terecht komt op de 'calibrerende hyperbolen'; ik heb de ellips toen terloops even meegenomen). Mijn kandidaten waren er van op de hoogte, dat dit buiten het programma om was. Eén van mijn kandidaten is op het examen dan ook 'dichtgeklapt', en heeft alleen van dit onderdeel geen letter op papier gezet.
Natuurlijk ga ik dit jaar de kegelsneden er in hameren. Aangezien ergens in Euclides de kegelsneden in één adem worden genoemd met de relaties, meen ik er zelfs goed aan te doen mijn wiskunde 1 kandidaten er van op de hoogte te stellen. Wel vraag ik me in alle ernst af, wat men heeft aan een programma, waaruit men geen conclusies mag trekken zonder er allerlei jaargangen van Euclides bij te moeten raadplegen, zoals ook Dr. Vredenduin suggereert in zijn artikel 'Het huidige leerplan wiskunde' (Euclides no. 9 van het jaar 1975/1976). Lang niet alle collega's zijn geabonneerd op Euclides, hoe jammer

dit ook moge zijn, en kunnen daarom niet geacht worden volkomen op de hoogte te zijn.

Als geometer van huis uit betreur ik de afgang van de meetkunde bij ons middelbaar onderwijs oprecht, en ik ben er van overtuigd, dat hiermee veel vormende waarde verloren gaat. Maar als wijze mannen eenmaal besluiten deze zaken buiten het programma te houden, dan doen ze er m.i. zeer onwijs aan hier tijdens de examens op terug te komen, min of meer onder het mom van 'het is toch te gek, dat een middelbare scholier dit of dat niet weet'. Er zijn genoeg onderwerpen, waarvan ik persoonlijk vind, dat een v.w.o.-er ze behoort te kennen, maar die ik toch niet buiten het programma om bespreek. Ik meen, dat dit zelfs niet is geoorloofd.
Ik dring er via dit schrijven dan ook nogmaals bij de verantwoordelijke mensen op aan zich strikt aan het programma te houden. Men moet er anders niet gek van opkijken als er straks leraren zijn, die de gang van zaken niet meer in overeenstemming kunnen brengen met hun verantwoordelijkheidsbesef tegenover hun kandidaten, en het daarom niet kunnen opbrengen hun handtekening te plaatsen.

Verslag examen wiskunde mavo-4 1976

Op 31 mei 1976 werden in 29 plaatsen in het land bijeenkomsten gehouden om het mavo-4-examen wiskunde te bespreken.
De bijeenkomsten, georganiseerd door de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, werden bijgewoond door een kleine 900 collega's. Een goede opkomst ondanks de naar veler mening te grote tijdsruimte tussen het verschijnen van de normen en het tijdstip van de bijeenkomsten.
Evenals vorig jaar was het doel van de bijeenkomsten:
a bespreking van de normen van de open vraagstukken met een gedachtenwisseling omtrent gevallen, waarbij de toepassing van de normen op moeilijkheden stuitte. In die gevallen zou men vervolgens tot een nadere verfijning kunnen komen binnen de bindende normen.
b bespreking van de opgaven, zowel van het meerkeuzewerk als van het open werk, vooral aangaande niveau en redactie.

I Het meerkeuzewerk.
Op de meeste bijeenkomsten kwam men door tijdgebrek niet of nauwelijks aan een bespreking van het meerkeuzewerk toe. Uit verschillende verslagen bleek dat men het werk als redelijk goed had beoordeeld.
Op een enkele bijeenkomst vroeg men zich af waarom de opgaven niet naar onderwerp worden gerangschikt. Ook had men hier opgemerkt dat opgaven met in de stam twee afzonderlijke beweringen die waar of niet waar zijn, eigenlijk dubbelvragen zijn.
Voor een nadere analyse verwijzen we naar de binnenkort verschijnende CITO-uitgave over het meerkeuzewerk van het examen mavo-3 en mavo-4 in 1976.

II **De open vraagstukken.**

1. In een rechthoekig assenstelsel XOY zijn gegeven de relaties
   $C = \{(x,y)\,|\,(x-2)^2+(y-1)^2 = 17\}$ en $L = \{(x,y)\,|\,x+y = 8\}$.
   a. Gegeven is $(a,0)\in C$.
   Bereken a.
   b. Gegeven is $(0,b)\in C$.
   Bereken b.
   c. Gegeven is $(p,q)\in C\cap L$.
   Bereken p en q.
   d. Teken de grafieken van C en L.
   e. Geef de elementen van de verzameling
   $\{(x,y)\in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\,|\,(x-2)^2+(y-1)^2 > 17\}\cap\{(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\,|\,x+y = 8\}$.

Niveau: goed.
Redactie: over het algemeen correct. Er waren collega's die de onderdelen *a*, *b* en *c* te moeilijk geredigeerd vonden door het gebruik van de variabelen *a*, *b*, *p* en *q*.
De formulering van onderdeel *e* vond men te vaag. In plaats van 'Geef' liever b.v. 'Schrijf ... op'.
Normering: deze leverde moeilijkheden op bij onderdeel *c*. Veel collega's vonden de voorgeschreven aftrekking van 1 punt als het verband tussen *p* en *q* niet bleek, niet goed, omdat in de vraagstelling niet of niet duidelijk naar dit verband zou zijn gevraagd.
De normering van onderdeel *e* achtten velen onjuist; er waren voorbeelden van leerlingen die na letterlijke toepassing van de normen geen enkel punt meer overhielden (b.v. $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ genomen i.p.v. $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$). Gelukkig paste men bijna overal in dit soort gevallen regel *e* (voorpagina normenblad) toe.

2. In een rechthoekig assenstelsel XOY zijn gegeven de vectoren
   $\vec{OA} = \begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$ en $\vec{OB} = \begin{pmatrix}-3\\6\end{pmatrix}$.
   a. Bewijs dat $|\vec{OA}| = |\vec{OB}|$.
   b. Bewijs dat de vectoren $\vec{OA}$ en $\vec{OB}$ loodrecht op elkaar staan.
   c. De lijn AB snijdt de y-as in het punt C.
   Druk de vector $\vec{OC}$ uit in $\vec{OA}$ en $\vec{OB}$.
   d. Van de vector $\vec{OD} = \begin{pmatrix}2\\k\end{pmatrix}$ is gegeven dat het eindpunt D op de lijn AB ligt.
   Bereken k.

Niveau: $\pm 75\%$ goed, $\pm 25\%$ te hoog. Het grote verschil in moeilijkheidsgraad tussen enerzijds de onderdelen *a* en *b* en anderzijds de onderdelen *c* en *d* werd door sommigen betreurd. Ten aanzien van het oplossen met behulp van vectoren waren de meningen verdeeld. Er waren collega's die vonden dat een dergelijke opgave alleen maar een met behulp van vectoren gegeven oplossing zou mogen toelaten; zij pleitten voor een 'vectorsom' zonder assenstelsel. Anderen vonden het een voordeel of zelfs een noodzaak dat meerdere oplossingsmethoden toegepast konden worden.

Redactie: over het algemeen goed. Echter met één uitzondering: op alle bijeenkomsten vond men de opdracht 'Druk ... uit' in onderdeel *c* te vaag. Enerzijds moet de kandidaat laten zien hoe hij aan het antwoord komt, maar anderzijds suggereert de vraag dat het antwoord direct mag worden opgeschreven (zoals ook b.v. in opgave 1*e*). Men hoopte dat dit soort vraagstellingen voortaan vermeden zou kunnen worden.
Tevens vroegen sommigen zich af of een dergelijk onderdeel (volgens enkelen moeilijker dan onderdeel *d*) geen inleidende vraag behoeft.
Normering: de normering van onderdeel *c* leverde moeilijkheden op. Velen vonden dat de vraagstelling te sterk suggereerde dat het antwoord direct mocht worden gegeven en wilden hiervoor het volle pond geven. Het merendeel was echter van mening dat zonder meer aflezen uit de tekening niet voldoende was om alle punten te mogen toekennen.

3. Van een balk $ABCD.EFGH$ is gegeven $AB = 20$, $AD = 12$ en $AE = 9$.
   a. Bereken de sinus van $\angle ABH$.
   Op de ribbe EH ligt het punt P zo, dat $HP = 3$.
De lichaamsdiagonaal BH snijdt het lijnstuk CP in het punt Q.
b. Toon aan dat $BQ = \frac{4}{5}\,BH$.
c. Op de ribbe AB ligt het punt R zo, dat $\angle BRQ = 120°$.
   Bereken QR.

Niveau: $\pm 70\,\%$ goed, $\pm 30\,\%$ te hoog. De onderdelen *b* en *c* vond men moeilijk; vooral *b* werd slecht gemaakt. Als oorzaken werden, behalve de moeilijkheidsgraad, genoemd: een slechte tekening, de kandidaat ziet het verband niet tussen de verschillende onderdelen, er ontbreken één of twee inleidende vragen; gelijkvormigheid en vermenigvuldiging komen in de examenklas bijna niet meer aan de orde, er ontbreekt stereometrisch inzicht waardoor de kandidaat niet ziet om welke vlakken het gaat, veel kandidaten komen er niet toe het betreffende vlak afzonderlijk te tekenen.
Redactie: in 't algemeen goed. Enkelen vonden de redactie te moeilijk, omdat de wijze van vraagstelling de opgave te ondoorzichtig maakte.
Normering: in 't algemeen goed. Enkelen vonden onderdeel *c* te hoog gewaardeerd.

4. De functie f met domein $\{x \mid -4 \leqq x \leqq 4\}$ is als volgt gedefinieerd:
   voor $-4 \leqq x \leqq 0$ is $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$
   en voor $0 < x \leqq 4$ is $f(x) = -x^2 + 4x - 2$.
   De functie g met domein $\{x \mid -4 \leqq x \leqq 4\}$ is gedefinieerd door $g(x) = -x + 2$.
   a. Bereken $f(-2)$ en $f(2)$.
   b. Los op $f(x) = 0$.
   c. Los op $f(x) = g(x)$.
   d. Teken de grafieken van f en g in een rechthoekig assenstelsel en geef met behulp van de figuur de oplossingsverzameling van $0 \leqq f(x) \leqq g(x)$.

Niveau: ±50% goed, ±50% te hoog. Veel collega's achtten deze opgave moeilijk of te moeilijk voor hun leerlingen voornamelijk vanwege het gecompliceerde karakter.
Men vond dat door onderdeel *d* teveel van het goede in één opgave was ondergebracht.
Sommigen meenden zelfs dat door deze opgave het niveau van het examenwerk als geheel op een te grote hoogte was gebracht.
Redactie: merendeels goed. Een groot aantal collega's vonden de wijze waarop de functie *f* gedefinieerd was nogal moeilijk. Men vroeg zich af of drie functies i.p.v. twee de opgave mogelijk doorzichtiger zouden hebben gemaakt.
Normering: Op de meeste bijeenkomsten vond men de verdeling van de punten niet geheel juist: onderdeel *d* werd naar veler mening met te weinig punten gewaardeerd.

Het gehele werk.
Een meerderheid achtte het werk als geheel op goed niveau; een minderheid vond het niveau hoog of te hoog.
Bijna overal vond men het werk te omvangrijk, waardoor de beschikbare tijd van twee uren vaak niet voldoende bleek.
Hier en daar klonk de opmerking: 'Mooi werk, maar de kandidaten maken het niet al te best'.
Op verschillende bijeenkomsten vroeg men om een onderzoek naar de resultaten van het open werk en naar de oorzaken van het mogelijk hoge percentage onvoldoendes.
Tot slot nog enkele in de verslagen voorkomende opmerkingen waar zeker niet iedereen het mee eens zal zijn:
- weinig kans voor een ijverige maar middelmatige leerling op een voldoende
- met uitsluitend de stelling van Pythagoras was een resultaat van bijna 4 te behalen
- er is verstarring van het examen; men weet van tevoren wat voor soort vraagstukken er komen, waardoor het gevaar ontstaat dat men op bepaalde types vraagstukken gaat trainen
- het examen is ieder jaar anders; training is daardoor bijna niet mogelijk
- alle opgaven waren van topniveau; één opgave van dit niveau was al voldoende geweest
- teveel tweedegraads vergelijkingen
- de goniometrie kwam te weinig aan bod
- de statistiek ontbrak
- teveel rekenwerk

En nog enkele wensen:
- een zodanig toegespitste vraagvorm hanteren, dat voor de kandidaat duidelijk is welke antwoordvorm gebruikt moet worden
- liever vijf dan vier opgaven
- via een artikel informatie over de nomenclatuur
- een nog verder gaande verfijning van de normen

F. J. Mahieu

Gemeenschappelijke bijeenkomst van Vlaamse en Nederlandse wiskundeleraren

De Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en de Vlaamse Vereniging van Wiskundeleraars organiseren voor hun leden een gemeenschappelijke studiedag op zaterdag 12 maart a.s.

Onderwerp:
zakrekenmachientjes en computer met betrekking tot het onderwijs.

De bijeenkomst wordt gehouden in het motel Breda te Breda. Om het motel per auto te bereiken moet men komend van de richting Rotterdam de richting Breda centrum volgen tot de afslag Rijsbergen/Zundert. Het motel wordt dan op ANWB borden aangegeven. Bovenstaande geldt ook komend uit de richting Antwerpen. Komend uit de richting Utrecht/Den Bosch de richting Antwerpen/Rotterdam volgen. Verder als boven. Voor treinreizigers staat er van 10.15–10.45 uur een oranje VW-busje (met opschrift Smits restaurants) gereed.

Dagindeling:
10.30 ontvangst en koffie
11.00 Vlaamse spreker over de zakrekenmachientjes met betrekking tot het onderwijs, nl. Frank Laforce: 'Miniprogrammering in het M.O.'
12.30 aperitief en lunch
14.00 Nederlandse spreker (Guus Vonk) over de computer met betrekking tot het onderwijs
16.00 sluiting
De kosten bedragen, alles inbegrepen, *f* 12,50 per persoon. Wilt u dit bedrag *voor 1 maart* storten op girorekening 143917 t.n.v. de penningmeester van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam?
Verleden jaar is voor het eerst een dergelijke gemeenschappelijke studiedag georganiseerd, toen te Eindhoven. Het aantal Nederlandse deelnemers was toen bedroevend gering. We hopen dat onze Nederlandse collega's, thans in grotere getale zullen komen. We rekenen vooral op leraren uit de zuidelijke provincies.

Het bestuur van de N.V.v.W.

Notulen van de algemene vergadering van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren op zaterdag 30 oktober 1976 in het Dr. F. H. de Bruijne Lyceum te Utrecht.

Om 10.20 uur opent de voorzitter, dr. Th. J. Korthagen, de vergadering. Hij heet in het bijzonder welkom het erelid, dr. Joh. H. Wansink, de oud-inspecteur

E. H. Schmidt, de inspecteurs drs. B. J. Westerhof en N. J. Zimmerman, de heer F. Laforce en mejuffrouw L. Simons als vertegenwoordigers van de Vlaamse Vereniging van Wiskundeleraars, de heren J. Timmer en J. P. Aldershof, inleiders op deze vergadering en de heer G. Krooshof als vertegenwoordiger van Euclides. Vervolgens spreekt de voorzitter zijn jaarrede uit. Deze is gepubliceerd in Euclides.
Na de jaarrede wordt de volgende motie ingediend en aangenomen:
De Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, op 30 oktober 1976 in jaarvergadering bijeen, spreekt haar diepe bezorgdheid uit over de uitspraken in de Memorie van Toelichting op de Rijksbegroting 1977, die betrekking hebben op de opheffing van het IOWO als instituut voor leerplanontwikkeling en her- en bijscholing.
Zij acht het onredelijk dat een instituut dat in alle opzichten baanbrekend werk verricht voor het wiskundeonderwijs wordt opgeheven, zonder dat er duidelijkheid bestaat omtrent de mogelijkheden tot voortzetting van het werk.
Zij vraagt de minister:
a. de aankondiging van geleidelijke opheffing ongedaan te maken, daar deze niet anders dan een schadelijk effect kan hebben op de werkzaamheden van het instituut,
b. opheldering te verschaffen over de mogelijkheden van financiering van het IOWO als interuniversitair instituut,
en gaat over tot de orde van de dag.
Deze motie wordt telegrafisch aan de Minister van Onderwijs en Wetenschappen gezonden.
Vervolgens wijst de voorzitter op de verdiensten van de heer E. H. Schmidt voor het wiskunde-onderwijs en stelt hij de vergadering voor hem het erelidmaatschap van de vereniging te verlenen. Nadat de heer Schmidt, die tijdens dit voorstel niet in de zaal aanwezig was, de zaal weer betreden heeft, biedt de heer L. van Beek hem tijdens een toespraak, waarin hij wijst op de visie van de heer Schmidt op het wiskunde-onderwijs, zijn invloed bij de modernisering van het wiskunde-onderwijs, zijn luisteren naar de visie van anderen en zijn inzet om anderen te overtuigen, het erelidmaatschap aan.
De heer Schmidt spreekt vervolgens een dankwoord. Hij vindt het erelidmaatschap een grote eer en aanvaardt het bijzonder graag. Hij merkt op dat hij volgend jaar veertig jaar lid van de vereniging is en altijd veel belangstelling voor de mavo-inspectie heeft gehad. Hij voelt zich door het erelidmaatschap opgenomen in de rij van prominenten zoals Wansink en Freudenthal.
Inmiddels zijn dr. G. Bosteels, erevoorzitter van de Vlaamse Vereniging van Wiskundeleraars en Prof. dr. R. Holvoet met hun echtgenotes gearriveerd en worden door de voorzitter hartelijk welkom geheten.
De notulen van de algemene vergadering van 1 november 1975 en de jaarverslagen worden goedgekeurd; de penningmeester wordt décharge verleend; in de kascommissie worden benoemd de heren A. J. Th. van den Berg uit Leidschendam en H. J. Smid uit Katwijk aan Zee.
De heren L. Bozua, drs. J. van Dormolen en M. Kindt worden als bestuurslid herkozen. De heer F. F. J. Gaillard, uit de l.b.o.-sector, wordt, ter uitbreiding van het bestuur, tot bestuurslid gekozen.

De contributie voor het verenigingsjaar 1977/1978 wordt vastgesteld op ƒ 35,–. Vervolgens houdt de heer J. Timmer een inleiding over: 'Evaluatie (en eindexamenproblematiek)'. Deze wordt gevolgd door een discussie in werkgroepen. Na de middagpauze wordt de vergadering hervat met een inleiding door de heer J. P. Aldershof over 'Alternatief schoolonderzoek', eveneens gevolgd door een discussie in werkgroepen.
Tijdens deze discussie wordt in een andere groep gesproken over het examenprogramma wiskunde I. De heer dr. P. G. J. Vredenduin verwijst naar het bestuursvoorstel in het oktobernummer van Euclides en vermeldt het rapport van de werkgroep van de Academische Raad betreffende de sociale vakken, de zogenaamde commissie Molenaar. Hierin worden eisen voorgesteld ten aanzien van studenten, die geen wiskunde I in hun pakket hebben. Bij de eisen voor kansrekening en statistiek wordt onder andere een elementaire behandeling van verwachtingswaarde genoemd. De heer Vredenduin stelt de vraag of het zin heeft verwachting zonder spreiding te behandelen. Hijzelf meent van wel. Daar het examenprogramma door toevoeging van verwachting te omvangrijk wordt, kan men als compensatie betrouwbaarheidsintervallen eventueel schrappen.
De heer J. J. Sloff meent dat biologen juist betrouwbaarheidsintervallen in het programma willen hebben.
Men vraagt zich af of men het wiskunde I-programma nog kan uitbreiden zonder de resultaten nog slechter te maken.
De heer Vredenduin stelt dat men tot nu toe slechts delen van de examenstof heeft weggelaten. Een uitbreiding is dus slechts het minder weglaten uit de examenstof. Voor goede resultaten zijn wel in 5 èn 6 v.w.o. 4 wekelijkse lesuren wiskunde I noodzakelijk. De heer M. Kindt meent dat veel leerlingen juist door de statistiek hun examenresultaten verhogen omdat dit onderwerp hen aanspreekt. Men meent dat dit ook ten koste van de overige vraagstukken kan gaan. Formeel kan alleen de Minister het examenprogramma wijzigen. De inspectie kan alleen besluiten dat een onderwerp een jaar niet gevraagd wordt op het centraal schriftelijk examen.
Sommige docenten, die ervaren dat de biologen in de 4e klas kansberekening onderwijzen, willen dit zelf graag doen en verschuiven een deel van de stof naar de 4e klas.
De aanwezigen gaan akkoord met het weglaten van betrouwbaarheidsintervallen en vervanging door verwachting, het tijdelijk weglaten van cyclometrische functies en partiële integratie.
Men wil in een circulaire opgenomen zien: 1) de stof voor statistiek, 2) de tijdelijke weglatingen en 3) vermelding van onderwerpen die wel in leerboeken voorkomen maar niet op het examen voor zullen komen, zoals breuksplitsing bij integratie en oplossing van differentiaalvergelijkingen waarbij gebruik gemaakt moet worden van een gegeven of gevonden particuliere oplossing.
Op de vraag of ook de differentiaalvergelijkingen niet tijdelijk uit het examenprogramma kunnen worden weggelaten merkt de heer Sloff op dat men ook moet kijken naar het wetenschappelijk onderwijs. Mislukken niet zoveel mensen bij het w.o. omdat zij bij het v.w.o. niet hebben leren werken?
De heer Van Dormolen meent niet dat het weglaten van een belangrijk stuk

leerstof noodzakelijkerwijs tot verslapping behoeft te leiden, men kan ook de rest degelijker doen.
Bij een stemming over weglaten van differentiaalvergelijkingen uit de examenstof blijken 9 aanwezigen tegen, 6 voor en 6 blanco te stemmen.
Er gaan stemmen op om geen apart goniometrievraagstuk op het examen te geven maar de goniometrie alleen in andere vraagstukken te werwerken.
De heer Sloff vraagt of in Euclides vermeld kan worden welke opgaven uit de examenbundel van Groeneveld niet relevant meer zijn voor het examen, terwijl de heer T. Goudriaan vraagt of het examen meer aan de examenbundel kan worden aangepast. De heer Vredenduin deelt mee dat er een herziening van de bundel komt. De heer Van Dormolen vindt dat de bundel vanuit een visie is geschreven en dat men hier rekening mee moet houden.
Nadat alle groepen weer samengekomen zijn vindt de rondvraag plaats.
De heer H. P. van Kampen vraagt of het mogelijk is aankondigingen over belangrijke voorstellen tijdig mede te delen. De voorzitter wijst op het te late verschijnen van Euclides.
De heer H. Broekman heeft in zijn discussiegroep twee problemen gesignaleerd. Men wil naast het thema van een vergadering van te voren meer gegevens over het onderwerp en men wil niet alleen discussiëren maar met de resultaten van de discussie meer doen.
De heer F. Laforce spreekt namens de Vlaamse Vereniging van Wiskundeleraars. Hij is dankbaar dat hij aanwezig is geweest. Hij kijkt terug naar de gemeenschappelijke Nederlands-Vlaamse dag in Eindhoven en wijst op de volgende gemeenschappelijke dag op 12 maart. Hij is teleurgesteld over de opkomst op deze jaarvergadering, temeer daar hij gehoord heeft dat de vereniging circa 2500 leden telt. Uit gesprekken bleek hem dat de Nederlandse leraar zich in zijn vrijheid beknot voelt en hij vraagt zich af of in de programma's niet een vrijheid voor de leraar moet worden ingebouwd. Het leren wiskundig denken komt anders onvoldoende aan bod.
De voorzitter dankt de heer Laforce, hij is blij met de goede verstandhouding met de Vlamingen.
De heer E. M. Koerts vraagt of het bestuur een mening heeft over het gebruik van rekenmachines op school. De voorzitter zegt dat het bestuur hierover geen mening heeft. De heer Vredenduin vraagt naar de bedoeling van de vraag; wil men de leerlingen verplichten een machine aan te schaffen of gaat het alleen over de mogelijkheden tot het gebruik?
De heer Koerts vraagt of men de circulaire van de inspectie over rekenmachines mag gebruiken om de rekenmachines uit de school weg te houden. De voorzitter zegt dat het bestuur er over zal denken; de heer L. A. G. M. Muskens zegt dat ook het IOWO er over denkt. De heer M. Kindt voegt hieraan toe dat rekenmachines een didactisch hulpmiddel kunnen zijn. De heer F. Laforce nodigt iedereen uit om op 29 januari naar de studiedag van de Vlamingen hierover te komen. De heer R. Holvoet wijst er op dat dit probleem ook op de gemeenschappelijke dag op 12 maart in Breda ter sprake komt.
De heer J. C. Mets vraagt of aan de motie betreffende het IOWO niet meer bekendheid gegeven moet worden. De voorzitter deelt mede dat deze ook aan de Onderwijscommissie van de Tweede Kamer en het A.N.P. wordt gezonden.

De heer P. van Wijk vindt de thema's van de dag te vrijblijvend over komen. Wat doen we hier verder mee? Kunnen hier gegevens voor een studiedag uit tevoorschijn komen? Kan uit de discussiegroepen een groep ontstaan die met concrete uitwerkingen komt? Het is jammer dat de resultaten tot de deelnemers beperkt blijft.
De heer Muskens ziet graag een verslag om dingen die bijvoorbeeld tot de inspectie door moeten dringen vast te leggen.
De heer Broekman nodigt iedereen uit met zijn ideeën naar voren te komen.
Mejuffrouw G. Fokkens ziet het thema van de jaarvergadering en enige uitwerkingen hiervan graag reeds in het septembernummer van Euclides. Zij vraagt tevens of het mogelijk is nieuwe leden over de activiteiten van de vereniging te informeren.
Volgens de heer Van Dormolen ligt er al 8 maanden een artikel hierover bij Euclides gereed. Hij vraagt dringend dit snel te plaatsen. De heer Joh. H. Wansink vraagt: Als er nog zoveel gepubliceerd moet worden, zijn de financieën van de vereniging dan niet zo dat er meer pagina's uitgegeven worden?
De heer L. van Beek vraagt of er mensen zijn die onderwerpen ter bestudering hebben en bovendien bereid zijn hier een werkgroep voor te vormen. De voorzitter vraagt dit aan het bestuur in te sturen. De Vlaamse collega's richten een vragenbank op. Ook wij hebben de mogelijkheid nodig om interessante dingen te vergaren en te publiceren.
De heer B. Knip informeert of het mogelijk is de prioriteiten van Euclides te verleggen.
De heer N. Boose heeft de vereniging pas na de C-cursus ontdekt. Moet de vereniging zich niet meer presenteren? Hij vraagt naar een onderzoek, uitgaande van de vereniging, naar wat leraren willen met betrekking tot de examenprogramma's.
Er is, volgens hem, niet aan de leraren gevraagd hoe men denkt over de invoering van de statistiek.
Volgens de heer Van Dormolen worden vrijwel jaarlijks aan alle scholen publikaties gezonden. Als men de vereniging niet kent ligt de schuld niet bij de vereniging.
Om ruim 4 uur sluit de voorzitter de vergadering.

Naar aanleiding van onder andere de rondvraag op de jaarvergadering heeft het bestuur zich bezonnen op inhoud en organisatie van de jaarvergadering. De agenda zal eerder worden gepubliceerd, hierbij zal het programma duidelijk worden aangekondigd met toelichting ten aanzien van inhoud en werkvorm. Over verwerking van de resultaten van een jaarvergadering wordt nog gedacht. Het bestuur werkt aan een uitgave waarin informatie zoals examenprogramma's, nomenclatuur, verenigingsactiviteiten, adressen, commissies en instellingen met hun doelstellingen wordt opgenomen.
Voor- en nadelen van het gebruik van rekenmachines in het wiskundeonderwijs zullen door het bestuur worden overdacht om tot een advies hierover te komen.
Adviezen en suggesties van leden naar aanleiding van deze en andere punten zullen door het bestuur in dank worden aanvaard en gebruikt.

Boekbespreking

H. Noltemeier. *Graphentheorie mit Algorithmen und Anwendungen.* Berlin/New York, Walter de Gruyter, 1976. 239 blz., prijs DM 48.–. (De Gruyter Lehrbuch)

De algoritmische grafentheorie neemt in vele curricula een steeds belangrijker plaats in. Het terrein is snel toegankelijk, de meeste problemen laten zich vlot formuleren en spreken ook meer praktisch georiënteerde studenten aan, en de gebruikte oplossingsmethoden vormen een uitstekende demonstratie van wat er in het overlappende gebied tussen discrete wiskunde, combinatorische optimalisering en informatica op dit moment te koop is. Dit verklaart het groeiende aanbod van leerboeken op dit terrein; naast het boek van Noltemeier is dat van N. Christofides (*Graph Theory: An Algorithmic Approach*, Academic Press, New York, 1975) vermeldenswaard.
Een korte samenvatting van de inhoud geeft aan dat Noltemeier m.b.t. de te behandelen stof een goede keuze heeft gedaan. Twee inleidende hoofdstukken bevatten de gebruikelijke voorbeelden en definities van grafen en de bijbehorende datastructuren. In de overige negen hoofdstukken komen aan de orde problemen rond bereikbaarheid en samenhang, bomen, efficiënte zoekmethoden, het vinden van cykels, kortste paden en stromen in netwerken, toewijzings-, overdekkings- en volgordeproblemen, en verschillende varianten op netwerkplanning. De auteur geeft er blijk van zeer goed op de hoogte te zijn van de huidige stand van zaken in de algoritmische grafentheorie. Geheel los van de taalbarrière die het Duits voor sommigen kan opwerpen moet echter worden vastgesteld dat de didactische kwaliteit van het boek teleurstellend is. De schrijver slaagt er diverse malen in essentieel eenvoudige ideeën te verdoezelen in een oerwoud van ingewikkelde notaties. Daarbij komt nog dat vele algoritmen worden gepresenteerd in een ALGOL-achtig jargon, over de duidelijkheid waarvan men kan twisten, maar waarvan de inelegantie reeds bij de eerste oogopslag duidelijk wordt. Voor een inleiding in de algoritmische grafentheorie verdient bovengenoemd boek van Christofides de voorkeur van het Nederlandse publiek.
De verzorging van het boek is verder zeer goed; het bevat nauwelijks drukfouten en is fraai geïllustreerd.

A. H. G. Rinnooy Kan

Robert G. Bartle, *The elements of real analysis*, 2de druk, John Wiley & Sons, New York, 480 blz.

Een uitermate goed leerboek der reële, abstracte analyse. Er wordt verondersteld, dat de lezer reeds enige kennis heeft van limietbegrip, differentiaal- en integraalrekening, rijen en reeksen. Genoemde onderwerpen worden in dit boek op een hoger, abstracter niveau behandeld. De opzet is zeer modern. Er wordt ruim gebruik gemaakt van topologische noties. Telkens wordt gewezen op andere dan reële getalverzamelingen. Absolute waarden gaan dan over in normwaarden behorende bij de betreffende ruimten. De opbouw van de theorie geschiedt zeer zorgvuldig. Vele vraagstukken geven een wezenlijke bijdrage in het geheel: verwerking van het bestudeerde, aanzet tot komende theorievorming en, speciaal in de zg. 'Projects', aansporing tot zelfstandig onderzoek. Vanaf het begin wordt een ruim gebruik gemaakt van rijen. Het grote voordeel ze te gebruiken bij continuïteitsoverwegingen wordt ten volle benut. De schrijver bezit de gave om zijn gedachtengang exact weer te geven. Volgende stellingen worden zorgvuldig voorbereid voordat ze geformuleerd worden. Telkens wordt de lezer verwezen naar literatuur voor aanvullende en diepere studie. Het abstractieniveau is niet te groot, maar zeker wel groot genoeg om goede aanzetten te geven voor verdere studie. De vele biografische notities plaatsen de behandelde stof in een historisch kader; een register sluit het werk af.
Een zeer belangrijk werk, dat eigenlijk door geen wiskundeleraar ongelezen mag blijven.

W. Kleijne

M. Rutsch und K.-H. Schriever, *Wahrscheinlichkeit II* (Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler), B. I. Wissenschaftsverlag, Mannheim-Wien-Zürich, 1976, 396 p. DM 28.–.

Dit tweede deel van een voor economen bestemd boek over waarschijnlijkheidsrekening bevat de hoofdstukken 4 (meetbare afbeeldingen, stochastische variabelen). 5 (stochastische variabelen van meerdere variabelen), 6 (karakteristieke functies) en 7 (voortbrengende functies). Van de ter sprake komende onderwerpen noem ik nog: verwachtingswaarde, momenten, de ongelijkheid van Tschebyscheff, wetten van de grote getallen, onafhankelijkheid van stochastische variabelen, verdelingsfuncties, normale verdeling. De behandeling is uitvoerig en in het langste (en voor de

beginner wel het moeilijkste) hoofdstuk 4 vindt de lezer enige illustraties, die niets met de tekst te maken hebben, benevens pregnante zinsneden uit het werk van Dedekind, Riemann, W. H. Young, Tschebyscheff, Poisson en Cramer (fotocopieën uit de oorspronkelijke artikelen). De lezer wordt hier en daar nogal overvallen met 'geleerde' woorden en formules, ook waar het wel eenvoudiger kan. De integratie ten opzichte van de gewone maat van Lebesgue wordt bekend ondersteld; de theorie ten opzichte van een abstrakte maat wordt tamelijk uitvoerig besproken, waarbij natuurlijk het geval van een waarschijnlijkheidsmaat (d.w.z. de maat $P(\Omega)$ van de totale verzameling Ω voldoet aan $P(\Omega) = 1$) de meeste aandacht krijgt. Hierbij wordt ook ingegaan op het aspekt van een integraal als lineaire functionaal, hetgeen voert tot de Daniell-integraal op een vectorrooster van functies. Verder worden de diverse soorten convergentie besproken, die voor rijen van integreerbare functies op kunnen treden. Het is begrijpelijk dat vele bewijzen ontbreken, in ruil waarvoor een aantal literatuurverwijzingen gegeven wordt. Toch vrees ik dat de meeste lezers (economen) voor wie dit boek bestemd is door de veelheid van details in hoofdstuk 4 overweldigd zullen worden, waardoor de vraag rijst of zij nog aan de daarop volgende hoofdstukken toe zullen komen.

A. C. Zaanen.

Lic. Jean Meeus en Dr. T. de Groot, *Sterrengids 1977*, D. D. Tjeenk Willink bv., Groningen 1976, 78 blz., *f* 17,50.

Ook dit jaar weer verschijnt er een uiterst goed verzorgde sterrengids, uitgegeven in opdracht van de Nederlandse Vereniging voor Weer- en Sterrenkunde. In deze gids komt ter sprake: tijdaanwijzing (UT, MET, ET), beknopt jaaroverzicht 1977 (verduisteringen, planeten), sterrenkaarten (12 kaarten: 6 paren noord-zuid), hemelverschijnselen in 1977 (per datum, het gehele jaar door, vermeld), de wegen van planeten en planetoïden, de zon in 1977, de maan in 1977, de planeten in 1977, allerlei (sterbedekkingen, rakende sterbedekkingen, minima van Algol, Mira), formaties rond de zon (schetsen van ontstaanstheorieën van ons zonnestelsel), sterrenkundige constanten en definities, testen met dubbelsterren, de kometen van 1971 tot 1973, sterrenbeelden, enkele hemelverschijnselen.
Een geweldige hoeveelheid informatie voor de amateur-astronoom en vele praktische aanwijzingen, die het zoeken aan het firmament vergemakkelijken. Vele schetsen, kaartjes, tabellen en grafieken verduidelijken het geheel. Afgezien van een enkele drukfout een voortreffelijke uitgave, die zeker zijn weg weer zal vinden. Goede wijn behoeft geen krans.

W. Kleijne

E. Hille, *Ordinary differential equations in the complex domain*, Wiley-Interscience, New York-London, 1976, XI+484 bl., £ 19.–.

Einar Hille, geboren in Noorwegen in 1894, bereikte in 1962 de pensioengerechtigde leeftijd als hoogleraar in de wiskunde aan de Yale universiteit. Vanaf 1959 heeft hij zijn uitgebreide kennis neergelegd in een aantal leerboeken (o.a. over reële analyse, complexe functies, reële differentiaalvergelijkingen). Het meest recente boek van zijn hand gaat nu over gewone differentiaalvergelijkingen in het complexe vlak. Bijna elk boek over differentiaalvergelijkingen bevat ook wel iets over complexe oplossingen. Dit nieuwe boek van Hille schijnt het eerste engelstalige werk te zijn dat uitsluitend aan differentiaalvergelijkingen in het complexe vlak gewijd is, waarbij dan de partiele differentiaalvergelijkingen nog buiten beschouwing gelaten zijn. Het is duidelijk dat van de lezer enige kennis van de complexe functietheorie verwacht wordt. De schrijver heeft hiervan, waar het Amerikaanse studenten betreft, geen hoge verwachtingen. Hij spreekt in zijn voorwoord over een 'subject in which our students are frequently weak: they comprehend little, and often their knowledge is too abstract and is of the wrong kind. Elementary manipulative skill is too often atrophied'. Daarom is een groot gedeelte van het eerste hoofdstuk gewijd aan het opfrissen van de kennis over complexe functies. De behandelde theorie over differentiaalvergelijkingen is in hoofdzaak de 'standaardtheorie' (stellingen over existentie en eenduidigheid van oplossingen, de vergelijking van Riccati, lineaire vergelijkingen met nadruk op die van de tweede orde, de hypergeometrische vergelijking en de vergelijkingen van Legendre, Bessel en Laplace, en tenslotte nog het een en ander over niet-lineaire vergelijkingen van de eerste en tweede orde). Aan ieder hoofdstuk zijn literatuurverwijzingen toegevoegd en in de tekst zelf vindt men een aantal opmerkingen die bijdragen tot begrip van de historische ontwikkeling van verscheidene onderwerpen. Het boek bevat 675 vraagstukken. De uitvoering is zeer verzorgd.

A. C. Zaanen.

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, Doorwerth.

Opgaven

360. Van een verzameling woorden wil men een ketting maken zo, dat van elk woord de eindletter dezelfde is als de beginletter van het volgende woord. De ketting moet gesloten zijn. Het spreekt vanzelf dat daartoe noodzakelijk is, dat elke letter even vaak voorkomt als eindletter als als beginletter. Maar deze voorwaarde is niet voldoende. Gevraagd een noodzakelijke en voldoende voorwaarde waaronder het vormen van de gesloten ketting mogelijk is.

361. Van 12 rode en 18 blauwe kralen maken we een gesloten ketting. Hoeveel verschillende kettingen zijn mogelijk? De ketting heeft geen slot. Twee kettingen die uit elkaar ontstaan door omkering (spiegeling t.o.v. een as in het vlak van de ketting) worden als niet verschillend beschouwd. (naar een suggestie van F. Laforce, Wilrijk)

Oplossingen

358. De hoekpunten van een convexe veelhoek worden met drie kleuren gekleurd; elk hoekpunt met één kleur. De drie kleuren komen alle drie voor en geen twee consecutieve hoekpunten worden van dezelfde kleur voorzien. Is het mogelijk de veelhoek door middel van diagonalen, die elkaar niet binnen de veelhoek snijden, zo in driehoeken te verdelen, dat geen twee hoekpunten die door een zijde of diagonaal verbonden worden, dezelfde kleur hebben?

Voor het gemak gaan we uit van een convexe achthoek. We tonen eerst aan, dat er drie consecutieve hoekpunten zijn die drie verschillende kleuren vertonen. Onderstel dit is niet het geval.

In figuur 1 is het bovenste hoekpunt de kleur a gegeven. Komen geen drie consecutieve hoekpunten met verschillende kleuren voor, dan is de kleuring zo, als in figuur 1 is aangegeven en komt kleur c dus niet voor.

Onderstel drie consecutieve hoekpunten hebben verschillende kleuren, zoals in figuur 2. Door een diagonaal te trekken hebben we het aantal hoekpunten met één verminderd en houden een zevenhoek over. In deze zevenhoek kunnen de hoekpunten niet om de andere b en c gekleurd zijn. Ook de kleur a komt dus weer voor. We passen op deze zevenhoek hetzelfde procédé toe. We trekken weer een diagonaal op de manier zoals in figuur 2 gedaan is. Nu blijft een zeshoek over. Komen in deze zeshoek de drie kleuren a, b en c voor, dan trekken we weer een diagonaal enz. Het is echter ook mogelijk, dat de kleur a niet meer voorkomt. Dan doet zich de situatie voor die in figuur 3 geschetst is. Uit deze figuur blijkt, hoe verdeling op de gewenste manier in driehoeken nu meteen mogelijk is.

De voorwaarde was dus niet alleen noodzakelijk, maar ook voldoende.

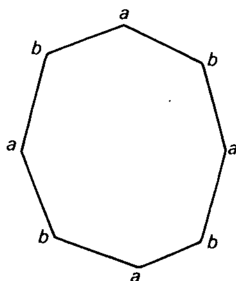


Fig. 1

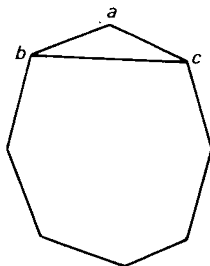


Fig. 2

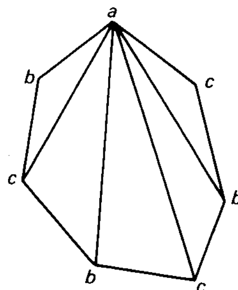


Fig. 3

359. Gevraagd een methode om onbegrensd veel viertallen verschillende natuurlijke getallen te vinden waarvoor
$a^{-2}+b^{-2} = c^{-2}+d^{-2}$
Als a en b de lengten van de rechthoekszijden van een rechthoekige driehoek zijn en h de lengte van de hoogtelijn op de hypotenusa, dan is
$a^{-2}+b^{-2} = h^{-2}$
Ons probleem is dus paren rechthoekige driehoeken te vinden met rechthoekszijden waarvan de lengten zich verhouden als natuurlijke getallen en die gelijke hoogtelijnen op de hypotenusa hebben. Ga daartoe uit van twee overigens willekeurige rechthoekige driehoeken waarvan de lengten van de drie zijden natuurlijke getallen zijn. Bijv. $\triangle A_1B_1C_1$ met $a_1 = 3$, $b_1 = 4$, $c_1 = 5$ en $h_1 = \frac{12}{5}$. En $\triangle A_2B_2C_2$ met $a_2 = 7$, $b_2 = 24$, $c_2 = 25$ en $h_2 = \frac{168}{25}$. Nu moeten we ervoor zorgen dat de twee hoogtelijnen even lang worden. Vermenigvuldig daartoe de zijden van de eerste driehoek met $5 \cdot 168$ en die van de tweede met $25 \cdot 12$ (althans zo zouden we in het algemeen te werk gaan; hier is natuurlijk vermenigvuldigen met 14 resp. 5 voldoende). We vinden nu het viertal getallen 42, 56, 35, 120, waarvoor inderdaad $42^{-2}+56^{-2} = 35^{-2}+120^{-2}$.
Het kost weinig moeite algemene formules op te stellen waaruit door substitutie de gevraagde viertallen verkregen kunnen worden. Ze zien er weinig vrolijk uit en zijn daarom weggelaten. Ieder kan ze zelf vinden.
Helaas vinden we langs deze weg niet alle mogelijke oplossingen. Bijv. niet $11^{-2}+22^{-2} = 10^{-2}+55^{-2}$. Er blijft dus nog werk over voor wie erin wil duiken.

Ad 353. Dr. P. Bronkhorst (Eindhoven) stuurde mij een verassend korte oplossing van deze opgave. Om na te gaan of de getallen a, b, c een winnende stand bij het nim-spel zijn, schrijven we ze onder elkaar in het tweetallig stelsel, bijv.
$a = 111000100101$
$b = 010110010011$
$c = 101110110110$
In elke kolom komen nu een even aantal (nl. 0 of 2) 1'en voor. Het drietal a, b, c is dan winnend. We zien dat c eenduidig door a en b bepaald wordt. De operatie die c uit a en b afleidt, voldoet aan de axioma's uit nr. 353, zoals men zonder veel moeite kan verifieren.

INHOUD